Penggunaan Aritmatika Interval sebagai Pendukung Proses Pembelajaran pada Jurusan Teknik Elektro

Noor Cholis Basjaruddin[1,2], Kuspriyanto[1], Yoga Priyana[1]
[1]Sekolah Teknik Elektro dan Informatika Institut Teknologi Bandung
[2]Jurusan Teknik Elektro Politeknik Negeri Bandung
Phone: +62-22-2013789 Email:ppmteam@gmail.com

Abstrak

Perhitungan dalam disiplin teknik elektro kerap melibatkan bilangan yang mempunyai nilai dalam jangkauan tertentu. Adanya ketidakpastian nilai dari bilangan menyebabkan proses pengolahan bilangan tersebut menjadi lebih komplek.Umumnya rumus ketidakpastian digunakan untuk menyelesaikan berbagai perhitungan yang melibatkan bilangan yang mempunyai nilai ketidakpastian.Pilihan lain untuk menyelesaikan berbagai perhitungan yang melibatkan ketidakpastian adalah aritmatika interval. Sebagaimana operasi aritmatika yang bersifat universal, aritmatika interval juga memungkinkan penggunaan yang lebih luas dibanding penggunaan rumus ketidakpastian.

Keywords: bilangan interval, rumus ketidakpastian, aritmatika interval

I. PENDAHULUAN

Berbagai perhitungan pada disiplin ilmu teknik elektro melibatkan peubah atau parameter yang nilainya berada pada jangkauan tertentu. Sebagai contoh pada pengolahan hasil pengukuran dan analisis rangkaian listrik. Peubah atau parameter yang mempunyai ketidakpastian memerlukan perlakuan khusus dalam proses perhitungan. Umumnya rumus ketidakpastian digunakan untuk menyelesaikan masalah ini. Penggunaan rumus ketidakpastian akan menjadi sangat sulit ketika perhitungan ditujukan untuk menganalisis sistem yang komplek seperti kebanyakan rangkaian listrik.

Cabang ilmu matematika yang membahas pengolahan bilangan dalam jangkauan tertentu dikenal sebagai aritmatika interval, matematika interval, analisis interval, atau perhitungan interval. Aritmatika interval bisa digunakan untuk mengatasi kesulitan dalam analisis sistem komplek jika ketidakpastian nilai turut diperhatikan. Selain itu, interval aritmatika bisa digunakan sebagai alternatif lain dari penggunaan rumus ketidakpastian.

II. ARITMATIKA INTERVAL

Aritmatika interval adalah metoda yang dikembangkan oleh para ahli matematika sejak tahun 50-an dan 60-an sebagai sebuah pendekatan untuk menentukan batas kesalahan pembulatan dan kesalahan pengukuran dalam perhitungan matematis sehingga diperoleh metoda numerik dengan hasil yang dapat diandalkan. Sebuah pernyataan pada aritmatika interval akan mewakili seluruh bilangan yang mungkin ada pada jangkauan tertentu. Sebagai contoh, perkiraan ketinggian orang yang biasanya ditulis sekitar 2 meter, pada aritmatika interval akan ditulis bahwa tinggi orang antara 1,97 dan 2,03 meter.

Operasi Dasar Aritmatika Interval

Sebuah bilangan interval $[\underline{x}; \overline{x}]$ diberi-batasan sebagai himpuan $x \subset \mathbb{R}$ (bilangan real) dengan $\underline{x} \le x \le \overline{x}$. Operasi dasar aritmatika interval adalah sebagai berikut:

1. $[\underline{x}; \overline{x}] + [\underline{y}; \overline{y}] = [\underline{x} + \underline{y}; \overline{x} + \overline{y}]$
2. $[\underline{x}; \overline{x}] - [\underline{y}; \overline{y}] = [\underline{x} - \overline{y}; \overline{x} - \underline{y}]$
3. $[\underline{x}; \overline{x}] \times [\underline{y}; \overline{y}] = [\min(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{xy});$
   $\max(\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\overline{y}, \overline{x}\underline{y}, \overline{xy})]$
4. $[\underline{x}; \overline{x}] \div [\underline{y}; \overline{y}] = [\underline{x}; \overline{x}].(1/[\underline{y}; \overline{y}])$ dimana
   $1/[\underline{y}; \overline{y}] = [1/\overline{y}; 1/\underline{y}]$ jika $0 \notin [\underline{y}; \overline{y}]$
5. width $x = \overline{x} - \underline{x} \le 0$
6. rad $x = ½$ width $x = ½ (\overline{x} - \underline{x})$
7. *midpoint* adalah mid $x = ½ (\overline{x} + \underline{x})$

Penulisan dengan cara lain dari bilangan interval adalah $x = [\,\underline{x}\,;\overline{x}\,] = \{x \subset \mathbb{R}$, jika $\underline{x} \le x \le \overline{x}\} = [x_0 - \Delta x\,;\, x_0 + \Delta x]$, dimana $x_0 = (\,\underline{x} + \overline{x}\,)/2$ yang merupakan nilai nominal dan $\Delta x = (\,\overline{x} - \underline{x}\,)/2$ adalah ketidak-pastian.

III. Penggunaan Aritmatika Interval

Berikut beberapa contoh penggunaan aritmatika interval pada analisis rangkaian listrik. Setiap contoh dibandingkan dengan perhitungan menggunakan rumus ketidakpastian.

A. Pengukuran Daya

Pada praktikum pengukuran daya digunakan dua alat ukur yaitu voltmeter dan amperemeter. Voltmeter menunjukkan besar tegangan V = (5,00 ± 0,05) volt sedangkan amperemeter menunjukkan besar arus I = (12,0 ± 0,5) mA. Penghitungan daya dengan memperhatikan ketidakpastian nilai V dan I dapat diselesaikan dengan aritmatika interval.

Pada aritmetika interval tegangan V ditulis [4,95;5,05] volt dan arus I ditulis [11,5;12,5] mA, sehingga daya pada rangkaian adalah sebagai berikut,

$$P = V.I = [4{,}95;5{,}05] \times [11{,}5;12{,}5]$$

$$= [\min\{(4{,}95)(11{,}5), (4{,}95)(12{,}5), (5{,}05)(11{,}5), (5{,}05)\quad(12{,}5)\};\max\{(4{,}95)(11{,}5), (4{,}95)(12{,}5), (5{,}05)(11{,}5), (5{,}05)(12{,}5)\}]$$

$$= [\min(56{,}925;\ 61{,}875;58{,}075;\ 63{,}125);\ \max(56{,}925;\ 61{,}875;58{,}075;\ 63{,}125)]$$

$$= [56{,}925;63{,}125] \text{ mW}$$

Jika perhitungan ini diselesaikan dengan rumus ketidakpastian,

$$P = V.I = 5 \times 12 = 60$$

$$|\,\Delta P\,| = |\,P\frac{\Delta V}{V}\,| + |\,P\frac{\Delta I}{I}\,|$$

$$= |\,60.\ \frac{0{,}05}{5}\,| + |\,60.\ \frac{0{,}5}{12}\,| \quad = 3{,}1$$

$$P = (60{,}0 \pm 3{,}1) \text{ mW} = (56{,}9 - 63{,}1) \text{ mW}$$

B. Perhitungan Tahanan Seri

Dua tahanan yaitu R_1 = (6,80 ± 10%) Ω dan R_2 = (4,7 ± 5%) Ω dihubungkan secara seri. Pada aritmati-ka interval tahanan keseluruhan dari rangkaian tersebut bisa dihitung dengan menggunakan operasi penjumlahan.

Nilai tahanan R_1 berada pada interval/jangkauan 6,80 ± 0,68 Ω, sedangakan nilai tahanan R_2 berada pada jangkauan 4,70 ± 0,23 Ω. Dalam aritmatika interval, kedua tahanan ditulis sebagai:

$$R_1 = [6{,}12;7{,}48]\ \Omega$$

$$R_2 = [4{,}47;4{,}93]\ \Omega$$

Sehingga,

$$R_s = R_1 + R_2 = [(6{,}12+4{,}47);(7{,}48+4{,}93)]$$
$$= [10{,}59;12{,}41]\ \Omega$$

Bandingkan jika perhitungan di atas diselesaikan dengan menggunakan rumus ketidakpastian 2 peubah.

$$R_s = R_1 + R_2$$

$$|\,\Delta R_s\,| = |\,\Delta R_1\,| + |\,\Delta R_2\,|$$

Sehingga,

$$R_s = (11{,}5 \pm 0{,}91)\ \Omega = (10{,}59 - 12{,}41)\ \Omega$$

C. Perhitungan Tahanan Paralel

Jika tahanan R_1 dan R_2 pada contoh 2 dihubungkan secara paralel, berapa kisaran nilai R ekivalen (R_p) ?

Rumus perhitungan tahanan parelel adalah:

$$R_P = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$\frac{1}{R_1} = 1/[6{,}12;7{,}48] = [0{,}13;0{,}16]$$

$$\frac{1}{R_2} = 1/[4{,}47;4{,}93] = [0{,}20;0{,}22]$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = [0{,}34;0{,}39]$$

$$R_p = 1\ /\ [0{,}34;0{,}39] = [2{,}58;\ 2{,}97]$$

$$= (2.78 \pm 0.19)\ \Omega$$

Bandingkan jika perhitungan di atas diselesaikan dengan menggunakan rumus ketidakpastian 2 peubah. R_1 adalah (6,80 ± 0,68) Ω dan R_2 adalah (4,7 ± 0,23) Ω.

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2{,}78$$

$$\Delta R_p = \frac{R_1^{\,2}\Delta R_2 + R_2^{\,2}\Delta R_1}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$= \frac{6{,}8^2.0{,}23 + 4{,}7^2.0.68}{(6{,}8 + 4{,}7)^2}$$

$$\Delta R_p = 0.19$$

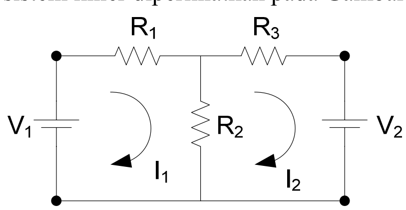
$$R_p = (2.78 \pm 0.19)\ \Omega$$

D. Pemecahan Persamaan Linier

Bentuk umum persamaan sistem linier 2 × 2 ditunjukkan pada persamaan (1),

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Metoda yang biasa digunakan untuk memecahkan persamaan di atas adalah metoda eliminasi Gaussian. Contoh sistem linier diperlihatkan pada Gambar 1.



Gambar 1 Rangkaian Listrik

Diketahui $R_1 = R_2 = R_3 = (1000 \pm 10\%)\ \Omega$, $V_1 = 10$ V, dan $V_2 = 2$ V. Pada rangkaian Gambar 1 arus I_1 dan I_2 akan dihitung dengan memperhatikan nilai ketidakpastian (toleransi) pada seluruh tahanan.

Analisis mesh rangkaian di atas adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2)I_1 - R_2I_2 &= V_1 \\ -R_2I_1 + (R_2 + R_3)I_2 &= -V_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Dalam bilangan interval nilai tahanan $R_1 = R_2 = R_3 = [900;1100]\ \Omega$. Langkah pertama metoda eliminasi Gaussian adalah menentukan $a_{21}/a_{11} = -R_2/(R_1+R_2)$. Pada aritmatika interval, bentuk tersebut lebih baik dinyatakan sebagai $-1/(1+R_1/R_2)$. Bentuk ini akan lebih memudahkan dalam proses perhitungan.

$$\begin{aligned} -1/(1+R_1/R_2) &= -1/(1 + [900;1100]/\ [900;1100]) \\ &= -[0{,}45;0{,}55] \end{aligned} \qquad (3)$$

Gunakan hasil perhitungan (3) untuk mendapatkan I_2,

$$([1800;2200] - (-[0{,}45;0{,}55])(-[900;1100]))I_2$$
$$= -2 - (-[0{,}45;0{,}55])10$$

$$[1800;2200]I_1 = 10 - (-[900;1100])I_2$$

Sehingga,

$$[1195;1795]I_2 = -2 + [4{,}5;5{,}5] = [2{,}5;3{,}5]$$

$$\begin{aligned} I_2 &= [1/1795;1/1195][2{,}5;3{,}5] \\ &= [0{,}0014;0{,}0029]\ \text{A} \\ &= [1{,}40;2{,}90]\ \text{mA} \end{aligned}$$

dan

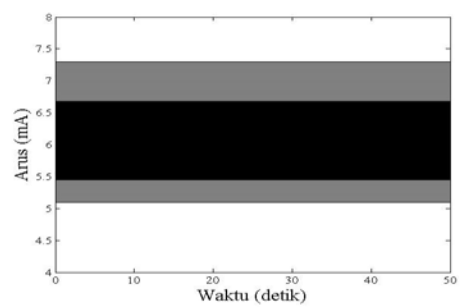
$$\begin{aligned} I_1 &= [1/2200;1/1800](10+[900;1100][0{,}0014;0{,}0029]) \\ &= [1/2200;1/1800](10 + [1{,}2600;3{,}1900]) \\ &= [1/2200;1/1800][11{,}2600;13{,}1900] \\ &= [0{,}0051;0{,}0073]\ \text{A} \\ &= [5{,}10;7{,}3]\ \text{mA} \end{aligned}$$

Tabel 1 menunjukkan hasil pengukuran dari simulasi rangkaian Gambar 1 dengan menggunakan piranti lunak Electronics Workbench. Nilai R_1, R_2, dan R_3 dipilih pada nilai batas bawah (900 Ω), nominal (1000 Ω), dan batas atas (1100 Ω). Hasil pengukuran menunjukkan bahwa nilai arus I_1 dan I_2 berada dalam jangkauan yang sesuai dengan hasil perhitungan.

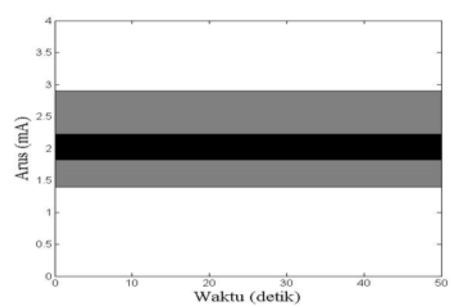
Tabel 1 Nilai Arus I_1 dan I_2

$R_1=R_2=R_3$ (Ω)	I_1 (mA)	I_2 (mA)
900	6,67	2,22
1000	6,00	2,00
1100	5,45	1,82

Gambar 2 dan 3 menunjukkan rentang arus I_1 dan I_2 hasil perhitungan dan hasil simulasi.



Gambar 2 Rentang arus I_1
(*hitam:simulasi, grey:perhitungan*)



Gambar 3 Rentang arus I_2
(*hitam:simulasi, grey:perhitungan*)

Contoh ini menunjukkan bahwa perhitungan dengan menggunakan aritmatika interval akan memudahkan mendapat jangkauan nilai I_1 dan I_2. Hasil simulasi menghasilkan jangkauan yang lebih sempit karena hanya menghitung I_1 dan I_2 untuk kondisi seluruh R yang sama. Pada kenyataannya sangat mungkin terjadi nilai R_1, R_2, dan R_3 berbeda-beda dalam waktu yang sama meskipun nilai-nilai tersebut masih dalam rentang nilai R.

E. Analisis

Tiga contoh pertama (A,B, dan C) di atas menunjukkan bahwa perhitungan yang melibatkan ketidakpastian nilai hasil pengukuran maupun nilai komponen bisa diselesaikan dengan menggunakan operasi dasar aritmatika interval.

Perhitungan dengan menggunakan aritmatika interval terlihat lebih panjang dibandingkan dengan menggunakan rumus ketidakpastian. Keuntungannya adalah perhitungan dengan aritmatika interval tidak membutuhkan hafalan rumus ketidakpastian.

Pada kasus tertentu rumus ketidakpastian tidak tersedia pada literatur dan harus diturunkan. Penurunan rumus ketidakpastian tersebut sangat sulit untuk sistem yang komplek. Contoh D memperlihatkan penggunaan aritmatika interval untuk sistem yang komplek dan dapat mengatasi kesulitan yang muncul jika diselesaikan dengan rumus ketidakpastian maupun menggunakan simulasi.

F. Penerapan Aritmatika Interval pada Berbagai Bidang Elektro

Saat ini penerapan aritmatika interval tidak terbatas pada ilmu-ilmu dasar teknik elektro. Pada disiplin ilmu Teknik Kendali, aritmatika interval saat ini antara lain digunakan dalam perancangan sistem kendali kokoh (*robust*) [2][3][15], perancangan sistem kendali berbasis logika samar (*fuzzy logic*) [4][10] dan perancangan robot [1][6]. Pada pengolahan citra, aritmatika interval antara lain digunakan dalam metoda *watermarking* [11]. Aritmatika interval juga digunakan dalam teknik penapisan derau yang kerap dibutuhkan pada pemrosesan sinyal digital [14]. Selain semakin luas dalam penerapannya, aritmatika interval juga perlu didukung oleh perangkat khusus yang digunakan dalam pemecahan aritmatika interval. Gagasan yang telah muncul adalah dikembangkannya I-ALU (*interval arithmatic logic unit*) [5].

IV. KESIMPULAN

Aritmatika interval dapat dijadikan pendukung proses pembelajaran berbagai mata kuliah pada Jurusan Teknik Elektro terutama mata kuliah yang melibatkan perhitungan nilai ketidakpastian. Selain sebagai pendukung, aritmatika interval juga bisa dijadikan alat untuk menyelesaikan berbagai persoalan komplek yang melibatkan bilangan interval yang mana pendekatan matematis lain tidak cocok digunakan.

Sebagaimana operasi aritmatika pada umumnya, aritmatika interval relatif mudah dipahami. Hal ini memungkinkan penggunaan aritmatika interval pada berbagai mata kuliah dasar seperti Teknik Pengukuran dan Rangkaian Listrik.

Agar mahasiswa mempunyai dasar dalam penguasaan aritmatika interval disarankan pembahasan aritmatika interval dimasukkan dalam mata kuliah Matematika. Selain itu agar dalam proses pembelajaran bisa lebih efektif perlu diperkenalkan piranti lunak pendukung aritmatika interval semisal INTLAB.

ACUAN

[1] Ashokaraj, I, et.al, Sensor based robot localization and navigation: using interval analysis and uncertain Kalman filter, Proceedings of 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, Sendai, 2004

[2] Beale, Guy, Analyzing the Stability Robustness of Interval Polynomials, George Mason University,Virginia, 2000

[3] Bhattacharyya, Chapellat and Keel, Robust control – the parametric approach, Prentice Hall,1995

[4] Bondia, Jorge,et.al, Controller Design Under Fuzzy Pole-Placement Specifications: An Interval Arithmetic Approach, IEEE Transactions On Fuzzy Systems, Vol. 14, No. 6, 2006

[5] Edmonson, William , Interval Arithmetic Logic Unit for Signal Processing and Control Applications, USA, 2006

[6] Fang,H, Dynamic Interference Avoidance of 2-DOF Robot Arms Using Interval Analysis,

[7] Hargreaves, G. I., Interval Analysis in MATLAB, Numerical Analysis Report No. 416, England, 2002

[8] Jaulin, Luc,et.al.,Applied Interval Analysis, Springer, London, 2001

[9] Kolev,LV., Interval Methods for Circuit Analysis, World Scientifc Publishing Co, Singapura, 1993

[10] Mazeika, Arunas,et.al, A new approach for computing with fuzzy sets using interval analysis, Fusion 2007 Conference Proceedings, Canada, 2007

[11] Minamoto, Teruya, A Digital ImageWatermarking Method Using Interval Arithmetic, IEICE Trans. Fundamentals, Vol.E90–A, No.12 December 2007

[12] Moore R. E., Introduction to Interval Analysis, SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics,Philadelphia, 2009.

[13] Patre, B. M. and Deore, P. J., Robust State Feedback for Interval Systems: An Interval Analysis Approach, Reliable Computing 14, 2010

[14] Roque M. P. Trindade, Basic Concepts of Interval Digital Signal Processing, Proceedings Of World Academy Of Science, Engineering And Technology Volume 30, July 2008

[15] Smaginaa,Y and Brewerb, Irina, Using interval arithmetic for robust state feedback design,Elsevier Science B.V, 2002Ton-Tai Pan, Ping-Lin Fan, and Huihua Kenny Chiang, Mechatronic Experiments Course Design: A Myoelectric Controlled Partial-Hand Prosthesis Project, IEEE Transactions on Education, Vol. 47, No. 3, August 2004

[16] Jad El-khoury, A Model Management and Integration Platform for Mechatronics Product Development, Doctoral Thesis, Stockholm, Sweden 2006

[17] Doppelt, Yaron, Assessment of Project-Based Learning in a Mechatronics, University of Pittsburg, US