

APLIKASI STEP FUNCTION DAN BEBAN FIKTIF DALAM ANALISA DEFORMASI BALOK NON PRISMATIS

Oleh:

Susilahadi

Staf pengajar Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Bandung
Jl. Gegerkalong Hilir Ds.Ciwaruga Kotak pos 1234 Bdg 40012

E-mail : sastrosudarmo.susilahadi@gmail.com

ABSTRAK

Penggunaan persamaan garis elastis untuk menentukan deformasi balok biasanya terbatas untuk balok prismatis. Pada balok non prismatis, EI tidak konstan sehingga menentukan persamaan garis elastis menjadi tidak mudah. Tulisan ini memaparkan penggunaan beban fiktif dan step function untuk menyelesaikan problema matematis balok non prismatis. Metode ini menghasilkan solusi eksak sehingga sangat cocok diaplikasikan dalam perhitungan numerik.

Kata-kata kunci: solusi eksak, step function, perhitungan numerik, deformasi, persamaan garis elastis

ABSTRACT

The use of elastic curve equation to determine the deformation of the beam is usually limited to prismatic beam. In the non-prismatic beam, EI is not constant so that the equation of elastic curve becomes complicated. This paper describes the use of fictitious load and step function to solve mathematical problems of non-prismatic beam. This method produces is an exact solution so that very properly used in the numerical analysis.

Key words: exact solution, step function, numerical analysis , deformation, elastic curve equation

Pendahuluan.

Perhitungan deformasi balok, terutama putaran sudut dan lendutan, sangat diperlukan sebagai pengetahuan dasar dalam analisa struktur. Perhitungan deformasi dapat dilakukan dengan banyak cara, antara lain : conjugate beam, unit load method, persamaan garis elastis, dan sebagainya.

Masing-masing cara mempunyai keunggulan sekaligus kelemahan tersendiri. Namun demikian secara sederhana dapatlah dikatakan bahwa derajat kemudahan dalam setiap cara perhitungan akan sangat tergantung dari sasaran yang diinginkan

Studi Pustaka

Balok Prismatis dan Balok Non Prismatis

Balok dengan kekakuan (EI) yang sama sepanjang bentang dinamakan balok prismatis, sehingga sepanjang bentang hanya mempunyai satu harga EI saja. Bila pada sepanjang bentang terdapat lebih dari 1(satu) harga EI maka balok disebut balok non prismatis

E adalah modulus elastis yang mewakili karakter bahan, sedang I adalah momen inersia (terhadap garis netralnya) yang mewakili besaran penampang.

Dengan demikian ketidak-prismatisan suatu bentang mungkin disebabkan oleh perbedaan sifat material sehingga E berbeda, atau karena dimensinya berbeda sehingga momen inersianya berbeda. Apalagi bila materialnya diganti dan dimensinya berubah, maka besar sekali kemungkinan harga kekakuan EI sepanjang bentang akan lebih dari satu sehingga struktur menjadi tak lagi prismatis

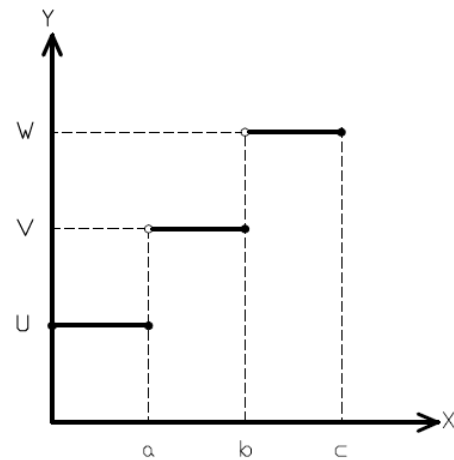
Step Function

Step function, yang sering diterjemahkan dengan istilah fungsi tangga, secara matematis dapat dinyatakan sebagai :

$$H = \begin{cases} U & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ V & \text{untuk } b < x \leq c \\ W & \text{untuk } c < x \leq d \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \\ \text{dan seterusnya} \end{cases} \quad (1)$$

Apabila persamaan (1) digambarkan dengan

mengurutkan harga-harga H yang ada, akan nampak bahwa bentuknya seperti tangga.



Gambar 1. Fungsi tangga

Nampak pada gambar bahwa untuk setiap interval akan memiliki harga H yang tertentu. Dengan menggunakan harga H ini pula maka nantinya beberapa permasalahan struktur yang rumit akan dapat dimanipulasi secara matematis sehingga menjadi lebih sederhana dan mudah diaplikasikan dalam perhitungan secara numerik.

Harga H yang berbeda untuk masing-masing interval ini nantinya akan berfungsi sebagai faktor pengali dalam operasi matematik.

Harga H yang biasanya digunakan dalam analisa struktur adalah : $H = 1$ dan $H = 0$

$H = 1$ mewakili statement 'ada' dan $H = 0$ mewakili statement 'tidak ada'

Untuk memberikan gambaran yang lebih konkrit, dapat dilihat pada contoh berikut :

$$F_1(x) = 2(x-2)^2, \quad \text{untuk } 0 \leq x \leq 2$$

$$F_2(x) = 2(x-2)^2 + \sin(x-2), \quad \text{untuk } 2 < x \leq 10$$

Dari interval diatas dapat dilihat bahwa fungsi tersebut kontinu pada $x = 2$ karena $F_1(2) = F_2(2)$.

Kedua fungsi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$F_1(x) = 2(x-2)^2 + 0 \cdot \sin(x-2), \text{ untuk } 0 \leq x \leq 2$$

$$F_2(x) = 2(x-2)^2 + 1 \cdot \sin(x-2), \text{ untuk } 2 < x \leq 10$$

Bentuk terakhir ini dapat digabungkan dengan menggunakan *step function*, menjadi :

$$F(x) = 2(x-2)^2 + H \cdot \sin(x-2), \text{ untuk } 0 \leq x \leq 10$$

Dimana $H = 0$ untuk $0 \leq x \leq 2$ dan $H = 1$ untuk $2 < x \leq 10$

Contoh lain :

$$F_1(x) = 3x, \text{ untuk } 0 \leq x \leq 1$$

$$F_2(x) = 3x + (x-1)^3, \text{ untuk } 1 < x \leq 3$$

$$F_3(x) = 3x + (x-1)^3 - 4(x-3), \text{ untuk } 3 < x \leq 5$$

Pada $x = 1$ fungsi kontinu karena $F_1(1) = F_2(1)$, sedangkan pada $x = 3$ kontinu karena $F_2(3) = F_3(3)$

Dalam bentuk lain, ketiga fungsi dapat dituliskan sebagai berikut :

$$F_1(x) = 3x + 0 \cdot (x-1)^3 - 0 \cdot \{ 4(x-3) \}, \text{ untuk } 0 < x \leq 1$$

$$F_2(x) = 3x + 1 \cdot (x-1)^3 - 0 \cdot \{ 4(x-3) \}, \text{ untuk } 1 < x \leq 3$$

$$F_3(x) = 3x + 1 \cdot (x-1)^3 - 1 \cdot \{ 4(x-3) \}, \text{ untuk } 3 < x \leq 5$$

Dengan *step function*, ketiga persamaan tersebut dapat digabung menjadi 1 persamaan sebagai berikut :

$$F(x) = 3x + H_1 \cdot (x-1)^3 - H_2 \cdot 4(x-3), \text{ untuk } 0 \leq x \leq 5$$

Dimana $H_1 = 0$ untuk interval $0 \leq x \leq 1$.

$= 1$ untuk interval $1 < x \leq 3$

$H_2 = 0$ untuk interval $0 \leq x \leq 3$.

$= 1$ untuk interval $3 < x \leq 5$

Syarat Batas Konstruksi (SBK)

SBK merupakan kondisi deformasi, baik putaran sudut maupun lendutan, yang besarnya tidak terpengaruh oleh beban yang bekerja. Atau secara sederhana dapat dikatakan bahwa deformasi yang terjadi bersifat konstan karena bukan merupakan fungsi dari beban yang bekerja. SBK ini biasanya terkait dengan perletakan yang mana deformasi pada perletakan ini dalam beberapa kondisi tidak terkait dengan besar kecilnya beban yang bekerja.

Pada Tabel 1 berikut ini tercantum SBK untuk 3 jenis perletakan : rol, sendi, dan jepit.

Tabel 1. Syarat batas konstruksi

No	Jenis perletakan	SBK
1	Rol	$\delta = 0$
2	Sendi	$\delta = 0$
3	Jepit	$\delta = 0$ dan $\theta = 0$

Persamaan Garis Elastis.

Persamaan garis elastis struktur, setelah mengalami penyederhanaan, biasanya dinyatakan dalam bentuk turunan kedua sebagai berikut :

$$y''(x) = \frac{-M_x}{EI} \dots\dots\dots (2)$$

dimana $y''(x)$ merupakan turunan kedua dari garis elastis dan M_x merupakan persamaan bidang momen yang berlaku sepanjang bentang, bukan persamaan bidang momen yang hanya berlaku pada sebagian bentang.

Putaran sudut (θ) merupakan turunan pertama, yaitu $\{y'(x)\}$ dari persamaan garis elastis sehingga :

$$\theta(x) = y'(x) = \int y''(x) dx + C \dots\dots\dots (3)$$

Sedangkan lendutan (δ) merupakan persamaan garis elastis itu sendiri, yaitu $y(x)$, sehingga :

$$\delta(x) = y(x) = \int y'(x) dx + C.x + D \dots\dots\dots (4)$$

Pada persamaan 3 dan persamaan 4 muncul konstanta C dan D.

Nilai konstanta C dan D muncul sebagai konsekuensi perhitungan matematis. Nilai C dan D ini dapat ditentukan dengan menggunakan syarat batas konstruksi (SBK) yang ada di Tabel 1.

Integrasi diatas semakin sulit manakala balok tidak prismatis dimana nilai EI tidak konstan sepanjang bentang karena merupakan fungsi dari x juga. Secara matematik, harga EI tidak dapat keluar dari tanda integral karena bukan merupakan konstanta. Oleh karena itu bahasan deformasi dengan menggunakan persamaan garis elastis biasanya terbatas pada balok yang prismatis saja.

Beban Fiktif

Beban fiktif bukan merupakan beban yang sebenarnya. Beban fiktif merupakan beban imajiner yang harus ditambahkan pada sistem pembebanan yang ada supaya batasan deformasi tidak berubah. Dalam kaitannya dengan garis elastis maka beban fiktif yang dimaksudkan disini akan berkaitan erat dengan persamaan bidang momen. Maka dari itu menentukan beban fiktif adalah menentukan beban yang besarnya sedemikian hingga menimbulkan momen tertentu yang mengakomodasi pengaruh perbedaan EI di sepanjang bentang.

Analisa dan Pembahasan

Analisa Deformasi Balok Non Prismatis

Analisa deformasi balok non prismatis bisa dilakukan dalam banyak cara. Dari sekian banyak cara itu, ada beberapa cara yang relatif masih sangat jarang muncul pada buku-buku literature maupun pada jurnal-jurnal Teknik Sipil. Salah satu diantaranya adalah analisa deformasi balok non prismatik menggunakan *step function* dan beban fiktif

Harga M/EI sering juga disebut beban kedua. Pada balok prismatis, bidang M/EI akan sebangun dengan bidang momen (M). Namun pada kasus balok non prismatis, bidang M/EI tidak lagi sebangun dengan bidang M . Karena semakin kaku (EI besar) maka nilai M/EI akan mengecil, dan demikian pula sebaliknya.

Agar persamaan garis elastis pada balok non prismatis dapat langsung di integralkan maka digunakan prinsip superposisi. Superposisi ini diperlukan supaya fenomena non prismatis dapat dianalisa sebagai balok prismatis dengan menambahkan beban tertentu. Beban inilah yang disebut sebagai beban fiktif. Superposisi ini hanya berlaku bila material masih dalam daerah elastis. Tidak akan berlaku prinsip superposisi ini bila material telah mencapai kondisi plastis

Analisa ini menghasilkan solusi eksak sehingga kebenarannya dapat dengan mudah diperiksa dengan cara membandingkan hasilnya dengan perhitungan lain lebih populer digunakan dalam dunia Teknik Sipil.

Pembahasan Aplikasi Step function dan beban fiktif Dalam Analisa Deformasi Balok

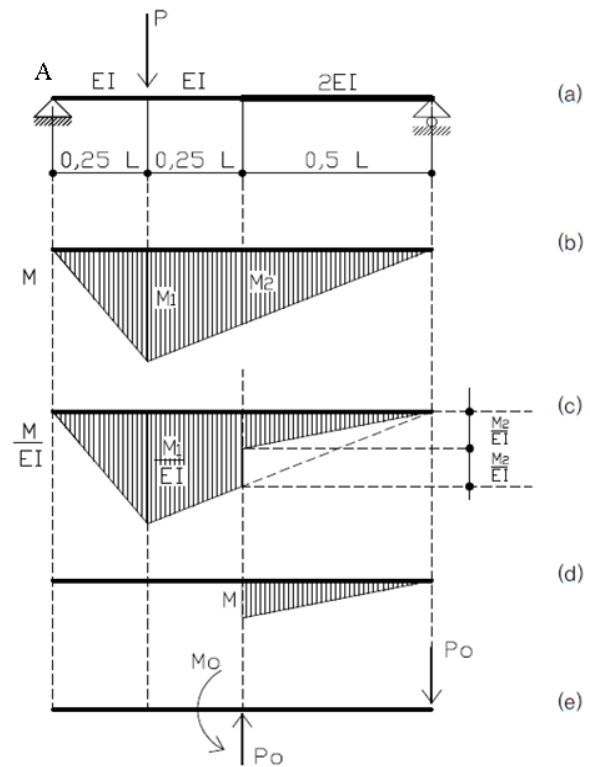
Basis tulisan ini adalah studi literatur , bukan penelitian atau eksperimen. Supaya lebih mudah dipahami maka bahasan ini disajikan dengan meninjau 3 buah kasus, yaitu :

- Balok non prismatis dengan beban terpusat
- Balok non prismatis dengan beban momen
- Balok non prismatis dengan beban terpusat dan terbagi merata

Kasus 1 :

Balok non prismatis dengan beban terpusat

Pada balok sederhana non prismatis dengan perletakan sendi rol, lihat Gambar 2(a), bekerja beban terpusat P . Dengan menggunakan persamaan kesetimbangan momen di tumpuan rol , diperoleh $R_A = 3P/4$. Bidang momen akibat beban tersebut dapat dilihat pada Gambar 2(b). Akibat pengaruh dari harga EI yang tidak sama sepanjang bentang, bidang M/EI tidak lagi sebangun dengan bidang M seperti terlihat pada Gambar 2(c).



Gambar 2. Balok non prismatis dengan beban terpusat

$M_1 = 3PL/16$ dan $M_2 = PL/8$ sehingga $M = M_1 - (M_2/2) = PL/16$

Beban fiktif : $M_0 = M = PL/16$

$$P_0 = M_0 / (L/2) = P/8$$

Persamaan bidang momen akibat pembebanan tersebut adalah :

$$M_1(x) = (3P/4) \cdot x, \text{ untuk } 0 \leq x \leq L/4$$

$$M_2(x) = (3P/4) \cdot x - P(x - 0,25L), \text{ untuk } L/4 < x \leq L/2$$

$$\begin{aligned} M_3(x) &= (3P/4) \cdot x - P(x - 0,25L) - M_0 + P_0 \cdot (x - 0,5L) \\ &= (3P/4) \cdot x - P(x - 0,25L) - PL/16 + (P/8) \cdot (x - 0,5L), \text{ untuk } L/2 < x \leq L \end{aligned}$$

Supaya persamaan dapat berlaku sepanjang bentang, maka perlu manipulasi matematik sebagai berikut :

$$M_1(x) = (3P/4) \cdot x - 0 \cdot P(x - 0,25L) + 0 \cdot \{-PL/16 + (P/8) \cdot (x - 0,5L)\}$$

$$M_2(x) = (3P/4) \cdot x - 1 \cdot P(x - 0,25L) + 0 \cdot \{-PL/16 + (P/8) \cdot (x - 0,5L)\}$$

$$M_3(x) = (3P/4) \cdot x - 1 \cdot P(x - 0,25L) + 1 \cdot \{-PL/16 + (P/8) \cdot (x - 0,5L)\}$$

Dengan menggunakan *step function* maka 3 fungsi diatas dapat digabung menjadi :

$$M(x) = (3P/4) \cdot x - H_1 \cdot P(x - 0,25L) + H_2 \cdot \{-PL/16 + (P/8) \cdot (x - 0,5L)\}$$

Dimana:

$$H_1 = 0 \text{ untuk } 0 \leq x \leq L/4$$

$$= 1 \text{ untuk } L/4 < x \leq L$$

$$H_2 = 0 \text{ untuk } 0 \leq x \leq L/2$$

$$= 1 \text{ untuk } L/2 < x \leq L$$

Persamaan garis elastis diperoleh dengan membangi $M(x)$ dengan EI sebagai berikut :

$$y''(x) = (-1/EI) [(3P/4) \cdot x - H_1 \cdot P(x - 0,25L) + H_2 \cdot \{-PL/16 + (P/8) \cdot (x - 0,5L)\}]$$

Dengan mengintegralkan terhadap x diperoleh :

$$\theta(x) = y'(x) = (-1/EI)[(3P/8)x^2 - H_1 \cdot (P/2)(x - 0,25L)^2 + H_2 \cdot \{-PL \cdot x/16 + (P/16)(x - 0,5L)^2\} + C]$$

$$\delta(x) = y(x) = (-1/EI)[(P/8)x^3 - H_1 \cdot (P/6)(x - 0,25L)^3 + H_2 \cdot \{-PL \cdot x^2/32 + (P/48)(x - 0,5L)^3\} + C \cdot x + D]$$

Nilai C dan D diperoleh dengan memasukkan SBK pada tumpuan.

- pada $x = 0$
 $H_1 = 0, H_2 = 0, \delta(0) = 0$ (sendi) ,
 didapatkan harga $D = 0$
- pada $x = L$
 $H_1 = 1, H_2 = 1, \delta(L) = 0$ (rol) , didapat
 $C = -(19/384)PL^2$

Dengan mengetahui harga C dan D maka baik putaran sudut maupun lendutan sepanjang bentang akan mudah dihitung.

Sebagai contoh untuk kondisi di tengah bentang ($x = L/2$), dimana $H_1 = 1$ dan $H_2 = 0$. Dari sini akan diperoleh :

$$\delta(L/2) = 3PL^3/256EI$$

$$\theta(L/2) = -5PL^2/384EI$$

Kasus 2

Balok non prismatic dengan beban momen

Lihat Gambar 3. Dari kesetimbangan momen di B, diperoleh: $R_A = 1$, $M_1 = 5$, dan $M_2 = 3,5$

Bidang momen M dan bidang M/EI dapat dilihat pada Gambar 3(b) dan 3(c)

Dari Gambar 3 (e) terlihat beban fiktif : $M_{01} = 7/3$ dan $M_{02} = 2/3$

Persamaan bidang momen akibat pembebanan tersebut adalah :

$$M_1(x) = \{-5 + M_{01} + M_{02} + (1 - P_0) \cdot x\}, \text{ untuk } (0 \leq x \leq 3/2)$$

$$M_2(x) = \{-5 + M_{01} + M_{02} + (1 - P_0) \cdot x\} + \{-M_{01} + P_0 \cdot (x - 3/2)\}, \text{ untuk } (3/2 < x \leq 3)$$

Supaya persamaan dapat berlaku sepanjang bentang, maka perlu manipulasi matematik sebagai berikut :

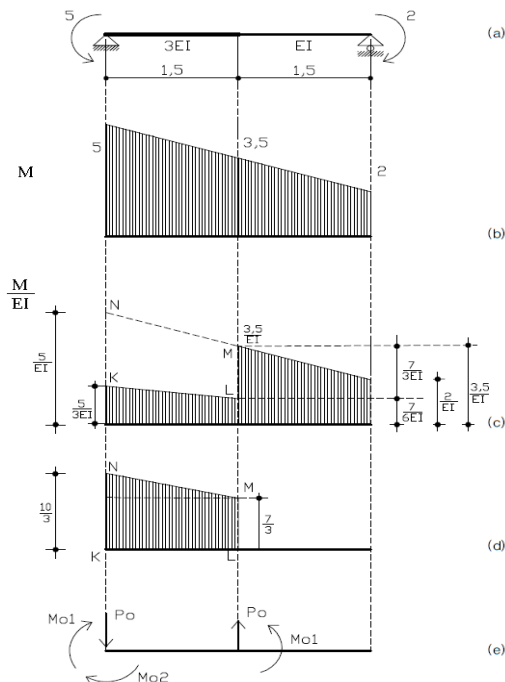
$$M_1(x) = \{-5 + M_{01} + M_{02} + (1 - P_0) \cdot x\} + 0 \cdot \{-M_{01} + P_0 \cdot (x - 3/2)\}$$

$$M_2(x) = \{-5 + M_{01} + M_{02} + (1 - P_0) \cdot x\} + 1 \cdot \{-M_{01} + P_0 \cdot (x - 3/2)\}$$

Dengan menggunakan *step function* maka 2 fungsi diatas dapat digabung menjadi :

$$M(x) = [\{-5 + M_{01} + M_{02} + (1 - P_0) \cdot x\} + H \cdot \{-M_{01} + P_0 \cdot (x - 3/2)\}]$$

$$= [\{-5/3 + (1/3).x\} + H . \{-7/3 + (2/3) . (x - 3/2)\}]$$



Gambar 3. Balok non prismatis dengan beban momen

Persamaan garis elastis diperoleh dengan membagi $M(x)$ dengan EI sebagai berikut :

$$y''(x) = (-1/EI) . [-5/3 + (1/3).x + H . \{- (7/3) (x - 3/2)^0 + (2/3) (x - 3/2)\}]$$

$$\theta(x) = y'(x) = (-1/EI) . [-5.x/3 + (1/6).x^2 + H . \{- (7/3) (x - 3/2)^1 + (1/3) (x - 3/2)^2\} + C]$$

$$\delta(x) = y(x) = (-1/EI) . [-5.x^2/6 + (1/18).x^3 + H . \{- (7/6) (x - 3/2)^2 + (1/9) (x - 3/2)^3\} + C.x + D]$$

Nilai C dan D diperoleh dengan memasukkan SBK pada tumpuan.

- pada $x = 0$ (sendi)
 $\delta(0) = 0$, didapat $D = 0$
- pada $x = 3$ (rol)
 $\delta(3) = 0$, didapat $C = 11/4$

Dengan mengetahui harga C dan D maka

baik putaran sudut maupun lendutan sepanjang bentang akan mudah dihitung.

Sebagai contoh untuk kondisi di tengah bentang ($x = 3/2$), dimana $H = 0$, diperoleh :

$$\delta(3/2) = - (39/16)/EI$$

Sedangkan pada $x = 1$, $H = 0$

$$\theta(1) = - 5/(4EI)$$

Hal ini merupakan penjelasan dari statement sebelumnya bahwa metoda ini sangat tepat untuk aplikasi perhitungan secara numerik menggunakan alat bantu komputer.

Kasus 3

Balok non prismatis dengan beban terpusat dan terbagi merata

Sumbu x dihitung dari kanan

$$M_1(x) = 0 \quad , \text{ untuk } 0 \leq x \leq 1$$

$$M_2(x) = [2(x-1)] \quad , \text{ untuk } 1 < x \leq 2$$

$$M_3(x) = [2(x-1) - (4/3)(x-2)^0 - (2-2/3) (x-2) + 1/2 . (1-2/3) (x-2)^2]$$

$$= [2(x-1) - (4/3)(x-2)^0 - (4/3) (x-2) + (1/6) (x-2)^2] \quad , \text{ untuk } 2 < x \leq 4$$

Dengan manipulasi matematik, ketiga persamaan dapat diubah menjadi :

$$M_1(x) = [0 . 2(x-1) + 0 . \{(-4/3)(x-2)^0 - (4/3) (x-2) + (1/6) (x-2)^2\}] \quad , \text{ untuk } 0 \leq x \leq 1$$

$$M_2(x) = [1 . 2(x-1) + 0 . \{(-4/3)(x-2)^0 - (4/3) (x-2) + (1/6) (x-2)^2\}] \quad , \text{ untuk } 1 < x \leq 2$$

$$M_3(x) = [1 . 2(x-1) + 1 . \{(-4/3)(x-2)^0 - (4/3) (x-2) + (1/6) (x-2)^2\}] \quad , \text{ untuk } 2 < x \leq 4$$

Ketiga persamaan dapat digabungkan menjadi :

$$M(x) = [H_1 . 2(x-1) + H_2 . \{(-4/3)(x-2)^0 - (4/3) (x-2) + (1/6) (x-2)^2\}] \quad , \text{ untuk } 0 \leq x \leq 4$$

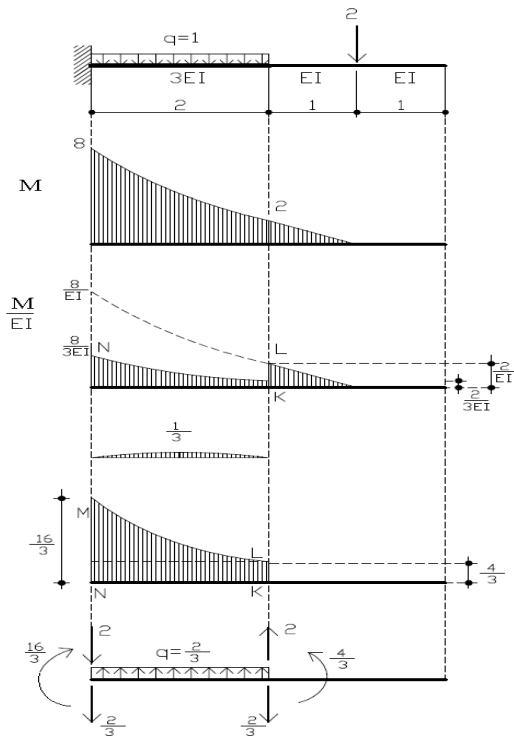
Dimana :

$$H_1 = 0 \text{ untuk } 0 \leq x \leq 1$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \text{ untuk } 1 < x \leq 4 \\
 H_2 &= 0 \text{ untuk } 0 \leq x \leq 2 \\
 &= 1 \text{ untuk } 2 < x \leq 4
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh :

$$\begin{aligned}
 y''(x) &= (-1/EI) \cdot [H_1 \cdot 2(x-1) + H_2 \cdot \{ (-4/3)(x-2)^0 - (4/3)(x-2) + (1/6)(x-2)^2 \}] \\
 \theta(x) = y'(x) &= (-1/EI) \cdot [H_1 \cdot (x-1)^2 + H_2 \cdot \{ (-4/3)(x-2)^1 - (2/3)(x-2)^2 + (1/18)(x-2)^3 \} + C] \\
 \delta(x) = y(x) &= (-1/EI) \cdot [H_1/3 \cdot (x-1)^2 + H_2 \cdot \{ (-2/3)(x-2)^2 - (2/9)(x-2)^3 + (1/72)(x-2)^4 \} + C \cdot x + D]
 \end{aligned}$$



Gambar 4. Balok non prismatis dengan beban terpusat dan terbagi merata

Nilai C dan D diperoleh dengan memasukkan SBK pada struktur.

- pada $x = 4$ (jepit) , $H_1 = 1$ dan $H_2 = 1$
 $\theta(4) = 0$, didapat $C = -37/9$

- pada $x = 4$ (jepit) , $H_1 = 1$ dan $H_2 = 1$
 $\delta(4) = 0$, didapat $D = 105/9$

Dengan mengetahui harga C dan D maka baik putaran sudut maupun lendutan sepanjang bentang akan mudah dihitung.

Sebagai contoh, putaran sudut maupun lendutan pada ujung kanan ($x = 0$), adalah sebagai berikut:

Untuk $x = 0$, nilai $H_1 = 0$ dan $H_2 = 0$, sehingga :

$$\theta(0) = -37/(9EI)$$

$$\delta(0) = 35/(3EI)$$

Kesimpulan :

1. Persamaan garis elastis hanya dapat digunakan untuk menganalisa deformasi balok prismatis . Bila balok tidak prismatis maka persamaan garis elastis tidak dapat digunakan dalam perhitungan deformasi. Namun dengan menggunakan beban fiktif maka persamaan garis elastis tetap dapat digunakan untuk perhitungan deformasi meskipun balok tersebut non prismatis.
2. Dengan *step function*, persamaan garis elastis dapat digunakan untuk menentukan besar deformasi setiap titik sepanjang bentang sebagai fungsi dengan 1 (satu) variabel saja.
3. Beban fiktif hanya dapat berfungsi sebagai pengganti pengaruh ketidak-prismatisan penampang sepanjang bentang, hanya bila hukum super posisi masih berlaku

Daftar Pustaka

Arora S.K and Ohri M.L, " Strength of Materials", USA, *Dhanpat Rai & Son* , 1970

Boresi, Arthur P & Schmidt, Richard J, "Advanced Mechanics of materials (Sixth Edition)", USA. *John Wiley & Son Inc*, 2003.

Oehlers, Deric J & Bradford, Mark A, " Elementary behaviour of composite steel and concrete structural members", Woburn,. *Butterwoth Heinemann*,1999

Susilahadi, " Perilaku non-Linier penampang komposit baja dan beton pada sambungan eksterior" _ Tesis , Jakarta, 2010