OPTIMISASI PEMROGRAMAN LINEAR MULTI OBJEKTIF PADA MASALAH PRODUKSI

OPTIMIZATION WITH MULTIPLE OBJECTIVES LINEAR PROGRAMMING IN PRODUCTION PROBLEM

Oleh : Endang Habinuddin
(UP MKU Politeknik Negeri Bandung)

ABSTRAK

Masalah optimisasi Pemrograman Linear Multi Objektif (PLMO) yang memuat konflik antar fungsi objektif dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pembobotan dan pemrograman tujuan. Penyelesaian yang diperoleh merupakan penyelesaian optimal Pareto.
Efektifitas penyelesaian optimal dapat juga ditentukan oleh pengambil keputusan dengan memberikan tujuan spesifik pada fungsi–fungsi objektif.

Kata Kunci : *Optimisasi, Multi Objektif, Penyelesaian Optimal Pareto*

ABSTRACT

The problem of the optimization with Multiple Objective Linear Programming containing the objective functions that conflict each other can be solved by the Weighing method and goal programming. The obtained solution is called Pareto optimal solution.
The optimal solution effectiveness could be also determined by the decision maker by giving specific goals on the objective functions.

Key Word : *Optimization, Multiple Objective Function, Pareto Optimal Solution.*

1. PENDAHULUAN

Masalah optimisasi yang dimodelkan dengan program linear fungsi objektif banyak (*Multiple objective*) sering dijumpai dalam bidang ekonomi, transfortasi dan manufaktur. Adapun masalah utama dalam optimisasi tersebut adalah menentukan penyelesaian optimal (nilai maksimum atau nilai minimum) fungsi-fungsi objektif dengan pembatas-pembatas yang diketahui. Secara ideal, diharapkan diperolehnya penyelesaian optimal lengkap yang secara simultan mengotimalkan seluruh fungsi objektif. Penyelesaian optimal lengkap seperti ini umumnya terjadi pada program linear dengan fungsi tujuan tunggal (*Single Objective*). Tetapi, kondisi seperti ini tidak selalu terpenuhi bila fungsi objektif lebih dari satu , hal ini karena sering terjadinya konflik antar fungsi objektif satu sama lain. Sehingga masalah optimisasi ini menjadi rumit, baik dalam analisis penyelesaian maupun pada komputasi numeriknya. Masalah lain yang dihadapi juga terletak pada keterbatasan pengadaan dan penguasaan perangkat komputasi yang digunakan.

Untuk kasus tidak diperolehnya penyelesaian secara lengkap, berbagai metode pendekatan beserta algoritmanya telah dilakukan.

Diantaranya metode Skalarisasi ; metode pembobotan (*Weighting Method* ; Kuhn dan Tucker, Zadeh 1963) , metode Minimax Terboboti (*Weighted Minimax Method* ; Bowman 1976) , metode Pembatas (*Constraint Method* ; Haimes dan Hall 1974), dan metode pemrogramaan tujuan (*Goal Programming* ; Ignizo 1983) [3,5] . Pemilihan metode tersebut bergantung pada masalah yang dihadapi serta keputusan yang diambil oleh pengambil keputusan. Hal ini telah dilakukan seperti metode pemrograman tujuan untuk penyelesaian masalah perbankan [1,2]

Berdasarkan uraian di atas, penulis akan meninjau (membahas) optimisasi program linear multi objektif dan efektivitas metode-metode penyelesaian pada kasus yang sama. Untuk itu, diambil 3 (tiga) metode penyelesaian yaitu metode pembobotan, metode Minimax terboboti dan pemrograman tujuan yang dimplementasikan pada masalah optimisasi perencanaan produksi barang.

Pembahasan masalah ini dimulai dari formulasi umum program linear multi objektif, metode-metode penyelesaian dan konsep yang mendasarinya, serta implementasi yang dilengkapi hasil komputasi dengan pemrograman menggunakan perangkat aplikasi spreadsheet EXCEL[4].

PEMROGRAMAN LINEAR MULTI OBJEKTIF

Pemrograman Linear Multi Objektif (PLMO) merupakan pemrograman linear yang memimumkan atau memaksimum fungsi objektif lebih dari satu fungsi objektif dengan himpunan pembatas *(constraint)* berbentuk pertidaksamaan.

Jika PLMO memiliki k buah fungsi objektif linear (z) dan n buah pembatas, maka bentuk PLMO sebagai berikut :

Min (Maks) :

$z_i(x) = c_i x$; i =1,..., k. (1)

dengan pembatas :

$Ax \leq b$, dan $x \geq 0$ (2)

Koefisien c_i , A dan b secara lengkap merupakan matriks yang memiliki bentuk sebagai berikut :

$$c_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ik}) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}^T$$

dan $b = [b_1, \ldots, b_n]^T$ (3)

Bentuk PLMO (1) dan (2) sering kali dinyatakan sebagai bentuk minimisasi vektor sebagai berikut :

min : $z(x) = Cx$ (4)

Subjek : $x \in X = \{x \in R^n | Ax \leq b, x \geq 0\}$ (5)

Z(x) dan C merupakan vektor yang berbentuk :

$z(x) = (z_1(x), \ldots z_k(x)) = (c_1 x, \ldots c_k x)$ (6)

$C = (c_1, \ldots, c_k)^T$ (7)

Permasalahan dari program linear multi objektif di atas adalah menentukan nilai optimal (maksimum atau minimum) fungsi objektif . Oleh karena itu , beberapa konsep / definisi penyelesaian sebagi teori pendukung dalam menentukan penyelesaian optimal akan ditinjau terlebih dahulu..

Secara umum, penyelesaian optimal dalam program linear dapat memenuhi tiga kriteria sebagai berikut [5, 6]:

Definisi 1. (Penyelesaian optimal lengkap (ideal)

x^* dikatakan penyelesaian lengkap jika dan hanya jika ada $x^* \varepsilon X$ sehingga $z_i(x^*) \leq z_i(x)$ untuk i = 1, ..., k dan semua x ε X.

Definisi 2.1 (Penyelesaian optimal Pareto)

x^* dikatakan penyelesaian optimal pareto jika dan hanya jika tidak ada x ε X yang lain sehingga $z_i(x) \leq z_i(x^*)$ untuk semua i dan $z_j(x) \neq\leq z_j(x^*)$ untuk paling sedikit sebuah j.

Definisi 2.2. (Penyelesaian optimal Pareto kuat)

x^* dikatakan penyelesaian optimal pareto kuat jika dan hanya jika tidak ada $x \varepsilon X$ yang lain sehingga $z_i(x) < z_i(x^*)$, $i = 1, \ldots, k$.

Penyelesaian optimal dapat memenuhi salah satu ketiga kriteria di atas bergantung pada fungsi-fungsi objektif dan pembatas program linear. Pada kondisi memenuhi definisi 1, maka penyelesaiannya seperti program linear fungsi objektif tunggal. Sedangkan pada kondisi memenuhi definisi 2, yaitu pada kondisi tidak diperolehnya nilai optimal secara simultan, maka penyelesaian optimal digunakan konsep definisi 2.1 atau definisi 2.2 yang dikenal dengan penyelesaian optimal pareto. Penyelesaian pareto ini merupakan penyelesaian pendekatan. Metode yang dapat digunakan diantaranya metode pembobotan (*Weighting Method*), metode minimax terboboti (*Weighted Minimax Method*) dan metode pemrograman tujuan (*Goal Programing*)

METODE PEMBOBOTAN (*Weighting Method*)

Metode pembobotan (*Weighting Method*) merupakan metode untuk memperoleh penyelesaian optimal Pareto dari PLMO yang dikembangkan oleh Kuhn dan Tucker, Zadeh 1963[3,5] Metode ini mengubah fungsi-fungsi objektif pers.(1) menjadi bentuk jumlah pembobotan dari semua fungsi objektif PLMO asal yang berbentuk :

Min : $wz(x) = \sum_{i=1}^{k} w_i z_i(x)$ (8)

Subjek $x \in X$. (9)

$w = (w_1, \ldots, w_k) \geq 0$ adalah koefisen pembobot. (10)

Jika x^* merupakan penyelesaian optimal , maka penyelesaian optimal Pareto PLMO didasarkan pada 2 (dua) konsep sebagai berikut :

1. Jika $x^* \in X$ adalah penyelesaian optimal dari masalah pembobotan untuk suatu $w > 0$, maka x^* merupakan penyelesaian optimal Pareto dari PLMO (1.1).
2. Jika $x^* \in X$ adalah penyelesaian optimal Pareto dari PLMO (1), maka x^* merupakan penyelesaian optimal masalah pembobotan (1.8) untuk suatu $w = (w_1, \ldots, w_k) \geq 0$.

Koefisien pembobotan pada pers. (1.8) memberikan perubahan *trade off* antar semua fungsi objektif yang ada. Hal ini akan menunjukkan berapa jumlah unit dari sebuah harga fungsi objektif memberikan tambahan pada fungsi objektif yang lain. Hal tersebut dapat ditinjau secara geometri,sebagai berikut :

- Jika ada k buah fungsi objektif $z = z = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$ dan

$W = w_1 z_1(x) + w_2 z_2(x) + \ldots + w_k z_k(x) = c$, (11)

maka pers (11) merupakan hyperplane dengan vector normal $w = (w_1, \ldots, w_k)$. Untuk k = 2, maka fungsi objektif merupakan sebuah garis, sedangkan untuk k =3 merupakan sebuah bidang.

Dengan menyelesaikan pers. (8) untuk koefisien $w^* > 0$, maka diperoleh nilai c minimum . Hyperplane ini memiliki paling sedikit satu buah titik x^* sebagai penyelesaian optimal pareto yang memenuhi daerah fisibel Z dalam ruang $z = (z_1, z_2, \ldots, z_k)$.

Jika hyperplane untuk minimum c ini mempengaruhi bidang daerah fisibel z pada titik $z(x^*)$ pada permukaan optimal Pareto, maka untuk perubahan yang kecil dari titik $z(x^*)$ menghasilkan $\Delta W = 0$, yaitu

$w^*_1 \Delta z_1(x) + w^*_{21} \Delta z_2(x) + \ldots + w^*_{k1} \Delta z_k(x) = 0$ (12)

Untuk $\Delta z_j = 0$, $j = 2, 3, \ldots, k$, $j \neq l$ kecuali z_l dan z_i , maka

$$w^*_1 \Delta z_1(x) + w^*_i \Delta z_i(x) = 0 \qquad (13)$$

yang memberikan $-\dfrac{\partial z_1}{\partial z_{i1}} = \dfrac{w^*_i}{w^*}$, (14).

Pers. (14) merupakan koefisien perbandingan pembobotan antara fungsi-fungsi objektif, dan dikenal sebagai *trade-off* antara fungsi-fungsi objektif.

METODE MINIMAX TERBOBOTI
(*Weighted Minimax*)[3,5]

Metode ini merupakan metode untuk memperoleh penyelesaian optimal Pareto dari PLMO yang dikembangkan oleh Bowman tahun 1976 [3,5]. Metode ini mengubah pers. (1) ke masalah minimax terboboti yang memiliki bentuk umum

$$\text{Min } maks\, w_i z_i(x) \;\; ; i = 1, 2, \ldots, k. \quad (15)$$

Subjek $x \in X$.

dan $maks\; w_i z_i(x)$ yang memiliki pengertian gabungan secara himpunan.

Jika V sama dengan $maks\; w_i z_i(x)$, maka pers. (15) dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\text{Min } V$$

$$\text{Subjek } w_i z_i(x) \leq V \quad (1.16)$$

$$x \in X.$$

V variabel bantuan dan $z_i(x) > 0$, i = 1, 2, ... k untuk $x \in X$.

Jika ditinjau secara geometri, contour maks $\{w_i z_i\}$ = c (konstan) pada ruang fungsi objektif merupakan sistem rectangular antara koefisien-koefisien pembobot. Oleh karena itu, penyelesaian masalah minimax terboboti akan menghasilkan penyelesaian optimal Pareto yang mempengaruhi daerah fisibel $Z = \{z(x) | x \in X\}$. Penyelesaian ini menggunakan konsep sbb :

- Hubungan antara penyelesaian optimal x^* dari masalah minimax terboboti dengan konsep optimal Pareto dari PLMO didasarkan pada konsep sbb :

1. Jika $x^* \in X$ adalah penyelesaian optimal tunggal dari masalah minimax terboboti untuk $w = (w_1, \ldots, w_k)$, maka x^* merupakan penyelesaian optimal Pareto dari PLMO (1.1).
2. Jika $x^* \in X$ adalah penyelesaian optimal Pareto dari PLMO (1.1), maka x^* adalah penyelesaian optimal masalah minimax untuk suatu $w = (w_1, \ldots, w_k)$.

PEMROGRAMAN GOAL LINEAR (PGL)

Dengan menggunakan formulasi PLMO bentuk (1.4) s.d (1.7), maka pada PGL penyelesaian ditentukan juga oleh pengambil keputusan dengan mengambil level / prioritas fungsi objektif yang dipilih. Level tersebut menentukan nilai penyimpangan antara fungsi objektif dengan nilai goal yang ditentukan oleh pembuat keputusan. Sedangkan penyelesaian optimal diambil dengan memperhatikan nilai penyimpangan minimum.

Nilai optimal PLMO pada PGL diperoleh dari optimisasi sebagai berikut :

$$\min \quad d\,(z(x), \hat{z}) \qquad (17)$$

$\hat{z} = (\hat{z}_1, \hat{z}_2, \ldots, \hat{z}_k)$ adalah vektor goal yang ditentukan pengabil keputusan dan d merupakan jarak/penyimpangan antara z(x) dengan $\hat{z}_i$.

Bentuk optimisasi (17) dapat dinyatakan dalam bentuk norm atau nilai mutlak :

$$\min \; d_i(z(x), \hat{z}) \hat{=} \sum_{i=1}^{k} \left| c_i x - \hat{z}_i \right| \qquad (18)$$

Jika setiap penyimpangan ke i memiliki bobot w_i , dan penyimpangan

$$d_i^+ = \frac{1}{2}\left\{ \left| z_i(x) - \hat{z}_i \right| + (z_i(x) - \hat{z}_i) \right\} \qquad (19)$$

$$d_i^- = \frac{1}{2}\left\{ \left| z_i(x) - \hat{z}_i \right| - (z_i(x) - \hat{z}_i) \right\} \qquad (20)$$

maka bentuk optimisasi adalah

$$\min \; d_i w(z(x), \hat{z}) \hat{=} \sum_{i=1}^{k} w_i \left| c_i x - \hat{z}_i \right| \qquad (21)$$

atau

$$Min \sum_{i=1}^{k} w_i (d_i^+ + d_i^-) \qquad (22)$$

dengan pembatas (Subjek) ;

$$z_i(x) - d_i^+ + d_i^- = z_i \;\; Ax \le b,\, ,\; x \ge 0 \qquad (23)$$

$$d_i^+ d_i^- = 0 \;,\; d_i^+ \ge 0 \;,\; d_i^- \ge 0 \qquad (24)$$

d_i^+ dan d_i^- masing-masing merupakan capaian atas dan bawah goal ke i, atau variabel penyimpangan.

Formulasi pemrograman tujuan sering kali diubah ke bentuk yang lebih umum dengan menyisipkan prioritas *preemptif* P_i. . Kondisi ini membagi fungsi objektif $z_1(x)$, $z_2(x)$, …, $z_k(x)$ ke dalam L urutan ranking ($1 \le L \le k$) dengan *preemptif* P_1, P_2 , … , P_L dalam urutan menurun , yaitu $P_l \ge P_{l+1}$ atau $tP_{l+1} \ge P_l$; l =1, 2, … , L-1. Sehingga bentuk pemrograman tujuan umum adalah :

$$Min \sum_{l=1}^{L} P_l \left(\sum_{i \in I_l} w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-\right) \qquad (25)$$

dengan pembatas (subjek) (1.23) dan (1.24), dan $_I \neq 0$ merupakan himpunan indeks dari fungsi objektif dalam prioritas ke l.
Jika L = k, maka pers.(1.25) berbentuk :

$$Min \sum_{i \in I_l}^{k} P_i (w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-) \qquad (26)$$

APLIKASI

Untuk menunjukkan efektifitas penggunaan ketiga metode penyelesaian PLMO yang telah dibahas di atas, maka ketiga metode akan digunakan pada studi kasus persoalan optimisasi perencanaan produksi suatu barang .

Studi kasus :
Suatu perusahan memproduksi 2 (dua) produk A dan B yang masing-masing menggunakan 3 (tiga) material X, Y dan Z yang berbeda-beda. Untuk memproduksi 1 ton produk A membutuhkan 1 ton material X, 5 ton material Y dan 8 ton material Z.Sedangkan untuk memproduksi 1 ton produk B membutuhkan. 4 ton material X, 1 ton material Y dan 6 on material Z. Jumlah yang tersedia untuk jumlah material X, Y dan Z masing-masing 22 ton, 30 ton dan 59 ton. Perusahaan ingin menjual produk A dengan harga Rp 2 juta / ton dan produk B dengan harga Rp. 1 juta/ton. Tetapi selama proses berlangsung, setiap 1 ton produk A menghasilkan 2 unit polusi berbahaya dan setiap 1 ton produk B menghasilkan 3 unit polusi berbahaya. Jika perusahaan tersebut ingin memaksimumkan total pendapatan dan meminimum total polusi, maka berapa jumlah produk A dan B.

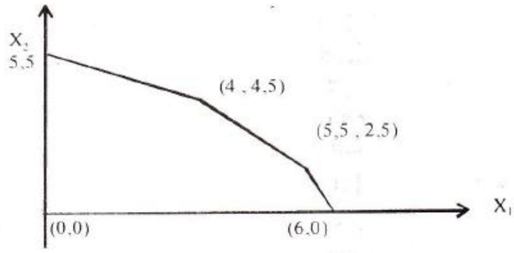
Pembahasan
Misal x_1 : jumlah produk A ,
x_2 : jumlah produk B
z_1 : total pendapatan ,
z_2 : total polusi

Model program linear multi objektif masalah di atas adalah :

Maks : $z_1 = 2x_1 + x_2$ atau Min
$z_1 = -2x_1 - x_2$,
Min $z_2 = 2x_1 + 3x_2$ (26)

Pembatas :

$$x_1 + 4x_2 \le 22\,;$$
$$5x_1 + x_2 \le 30\;\;;$$
$$8x_1 + 6x_2 \le 59\,;\; x_1, x_2 \ge 0. \qquad (27)$$



Gambar 1

Nilai x dan z pada batas-batas daerah fisibel serta nilai ekstrim secara masing-masing ditunjukkan pada tabel 1 dan tabel 2 berikut :

Tabel 1
Nilai z1 dan z2 pada batas daerah fisibel

x1	x2	z1	z2
0	0	0	0
0	5.5	-5.5	16.5
4	4.5	-12.5	21.5
5.5	**2.5**	**-13.5**	**18.5**
6	0	-12	12

Tabel 2
Nilai ektrim z1 dan z2 pada daerah fisibel

Z	Nilai z	x1	x2
min z1	**-13.5**	5.5	2.5
mak z1	**0**	0	0
min z2	**0**	0	0
mak z2	**21.5**	4	4.5

Pada tabel 1 dan 2, nilai optimal masing-masing yaitu min z_1 = -13,5 pada titik (5,5 , 2,5) dan min z_2 = 0 pada titik (0,0). Kedua nilai ekstrim z ini tidak pada sebuah titik yang sama secara simultan. Penyelesaian ini merupakan penyelesaian optimal pareto, dan penyelesaian optimal dapat dilakukan dengan metode-metode pendekatan sebagai berikut :

METODE PEMBOBOTAN

Dengan menggunakan pers.(1.8), maka PLMO (1.26) menjadi MOLP dengan pembobotan w, yaitu

Min $wz(x) \underline{\underline{\Delta}} w_1(-2x_1 - x_2) + w_2(2x_1 + 3x_2)$ (28)

dan pembatas (subjek) pers. (27).

Jika diambil harga w_1 = 0,7 dan w_2 = 0,3, maka
$wz(x) = -0{,}8x_1 + 0{,}2x_2$
Diperoleh z_1 = -12 dan maks z_2 =12.
Secara lengkap untuk beberapa harga w_1 , w_2 antara 0 s.d 1 dan meminimalkan harga wz , hasilnya ditunjukkan pada tabel 3 berikut :

Tabel 3.
Nilai z1 dan z2 dengan pembobot w1 dan w2

Variabel		**Pembobot**		**Min**	**Min**	**MIN**
x1	**x2**	**w1**	**w2**	**z1**	**z2**	**wz**
6	**0**	**0.7**	**0.3**	**-12**	**12**	**-4.8**
0	0	0.3	0.7	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0
5.5	**2.5**	**1**	**0**	**-13.5**	**18.5**	**-13.5**
0	0	0.6	0.4	0	0	0
0	0	0.4	0.6	0	0	0
0	0	0.5	0.5	0	0	0

Terlihat bahwa penyelesaian optimal yang diperoleh adalah min z_1 = -13,5 (maks z_1 =-13,5) , min z_2 = 18,5, dengan x_1 = 5,5, x_2 = 2,5, w_1 = 1 dan w_2 = 0. Jadi , pendapatan maksimum yang diperoleh sebesar Rp. 13,5 juta dan minimum polusi 18,5 unit.

METODE MINIMAX TERBOBOTI

Dengan harga minimum $z_1(x)$ dan $z_2(x)$ berturut-turut adalah -13,5 dan 0, serta dipilih w_1 = 0,5, w_2 = 0,5, maka

$\hat{z}_1(x) = z_1(x) - (-13{,}5)$. PLMO (27)
menjadi PLMO minimax terboboti sebagai berikut

Min $maks(-x_1 - 0{,}5x_2 + 6.75, x_1 + 1{,}5x_2)$ 29)
dan pembatas (subjek) pada pers. (1.27).
PLMO (1.29) dapat juga diubah ke bentuk (1.16), yaitu

$$\text{Min V} \quad (30)$$

dengan pembatas :

$$-x_1 - 0{,}5x_2 + 6.75 \le v \quad (31)$$

$$x_1 + 1.5x_2 \le v$$

Penyelesaikan optimisasi pers. (30), pembatas (27) dan (31), hasilnya seperti ditunjukkan pada tabel 4 berikut :

Tabel 4
Nilai z1 dan z2 dengan meminimumkan v

	x1	**x2**	**Min v**		
HARGA	3.38	0.00	3.38		**3.38**
z1	-2.00	-1.00			-6.75
z2	2.00	3.00			6.75
Pembatas				b-terpakai	b
	1.00	4.00		3.38	22.00
	5.00	1.00		16.88	30.00
	8.00	6.00		27.00	59.00
z2	1.00	1.50	-1.00	0.00	0.00
z1	-1.00	-0.50	-1.00	-6.75	-6.75

Diperoleh min v = 3,38, z_1 = -6,75, dan z_2 = 6,75. Bila diamati bahwa z_1 = -6,75 merupakan hasil dari $\hat{z}_1 = z_1 + 13{,}5$. Sehingga bila penyelesaian optimal (-12,12), maka penyelesaian optimal pareto adalah (1,5, 6,75).

Metode Pemrograman Tujuan (*Goal Programming*)

Untuk dapat menggunakan metode pemrograman tujuan pada masalah optimisasi perencanaan produksi di atas, maka beberapa ketentuan/batasan tambahan harus diberikan. Batasan-batasan itu meliputi batasan variabel dan nilai fungsi objektif yang diberikan secara simultan dengan batasan yang sudah ada.
Andaikan masalah di atas diberikan ketentuan sebagai berikut :
Z1 : paling sedikit total pendapatan Rp. 12 juta.
Z2 : tingkat polusi dibawah 15
P : jumlah produk A paling sedikit 4,5 ton dan produk B paling sedikit 2 ton.

Dengan menggunakan pers. (26), maka pemrograman tujuan dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$Min \sum_{i \in I_l}^{k} P_l (w_i^+ d_i^+ + w_i^- d_i^-) \quad (32)$$

pembatas :

$$2x_1 + x_2 - d_1^+ + d_1^- = 12 \ ; \quad 2x_1 + 3x_2 - d_2^+ + d_2^- = 15$$
$$x_1 - d_3^+ + d_3^- = 4{,}5 \ ; \quad x_2 - d_4^+ + d_4^- = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 22 \ ; \quad 5x_1 + x_2 \le 30$$
$$8x_1 + 6x_2 \le 59, \ x_1, x_2 \ge 0.$$

Hasil penyelesaian akhir dengan nilai bobot w yang berbeda-beda, ditunjukkan pada tabel 5 sampai dengan tabel 7 :

Tabel 5

Hasil perhitungan untuk $w_1^- = w_2^- = w_3^- = w_3^+ = w_4^+ = 1$ dan $w_1^+ = w_2^+ = w_4^- = 0$.

	x1	**X2**		
Koefisien z1	**2**	**1**		
Koefisien z2	**2**	**3**		
Konstrain GOAL	x1	x2	**Pendapatan**	**Polusi**
Aktual	5	2.00	12	16
d^-	0.00	0.00	0.00	0.00
d^+	**0.50**	0.00	0.00	**1.00**
=goal	4.5	2	12	15
Target Harga	4.5	2	12	15
Pembatas	1	4	12.5	22
	5	1	24.5	30
	8	6	48	59
Persen dev				
$P\text{-}d^-$	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
$P\text{-}d^+$	**11.11%**	0.00%	0.00%	**6.67%**
Bobot (w)				
w^-	*1*	*1*	*1*	*0*
w^+	*0*	*0*	*1*	*1*
Min-objektif	**0.07**			

Tabel 6

Hasil perhitungan untuk $w_1^- = w_1^+ = w_2^- = w_3^- = w_4^+ = 1$ dan $w_2^+ = w_3^+ = w_4^+ = 0$.

	x1	x2		
Koefisien z1	**2**	**1**		
Koefisien z2	**2**	**3**		
Konstrain GOAL	x1	X2	**Pendapatan**	**Polusi**
Aktual	4.5	2.00	11	15
d^-	0.00	0.00	1.00	0.00
d^+	0.00	0.00	0.00	0.00
=goal	4.5	2	12	15
Target Harga	**4.5**	**2**	**12**	**15**
Pembatas	1	4	12.5	22
	8	6	48	59
Percent dev				
$P\text{-}d^-$	0.00%	0.00%	8.33%	0.00%
$P\text{-}d^+$	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Bobot (w)				
w^-	**1**	**1**	**1**	**0**
w^+	**1**	**0**	**0**	**1**
Min-objektif	**0.08**			

Tabel 7

Hasil perhitungan untuk $w_1^- = w_2^- = w_3^+ = 1, w_3^- = w_4^+ = 10$ dan $w_1^+ = w_2^+ = w_4^- = 0$.

	x1	x2		
Koefisien z1	**2**	**1**		
Koefisien z2	**2**	**3**		
Konstrain GOAL	x1	x2	**Pendapatan**	**Polusi**
Actual	5.25	1.50	12	15
d^-	0.00	0.50	0.00	0.00
d^+	0.75	0.00	0.00	0.00
=goal	4.5	2	12	15
Target Harga	**4.5**	**2**	**12**	**15**
Pembatas	1	4	12.5	22
	5	1	24.5	30
	8	6	48	59
Persen dev				
P-d^-	0.00%	25.00%	0.00%	0.00%
P-d^+	16.67%	0.00%	0.00%	0.00%
Bobot (w)				
w^-	**1**	**1**	**10**	**0**
w^+	**0**	**0**	**1**	**10**
Min-objektif	**0.25**			

ANALISIS HASIL

Tabel 5 : Minimum penyimpangan = 0,07, dengan nilai penyimpangan pencapaian x1 sebesar 0,50 (11,11 % dari nilai aktual x1 = 5), dan pada z2 sebesar 1 (6,67 % dari nilai aktual z2 = 1).
Tabel 6 : Minimum penyimpangan = 0,07, dengan nilai penyimpangan pencapaian z1 sebesar 1,00 (8,33 % dari nilai aktual z1 = 11).
Tabel 7 : Minimum penyimpangan = 0,25, dengan nilai penyimpangan pencapaian x1 sebesar 0,50 (16,67 % dari nilai aktual x1 = 5,25) dan pencapai x2 sebesar 0,50 (25 % dari nilai aktual x2 = 1,5).

Dari hasil komputasi didapat bahwa nilai optimal mempunyai banyak kemungkinan. Pemilihan nilai tersebut bergantung pada seberapa jauh nilai penyimpangan minimum yang ingin dicapai dari nilai target yang ditetapkan. Disinilah pembuat keputusan sangat besar peranannya.

KESIMPULAN

- Efektivitas metode penyelesaian bergantung pada masalah yang dihadapi dan tujuan yang ingin dicapai. Oleh karena itu, ada 2 (dua) strategi untuk menyelesaikan optimisasi multi objektif, yaitu
  1. PLMO secara utuh ; digunakan metode pembobotan
  2. PLMO secara tidak utuh dengan memberikan ketentuan ,batasan tambahan atau target yang ingin dicapai oleh pembuat keputusan ; digunakan metode Minimax Terboboti dan metode pemrograman tujuan.
- Nilai optimal pada setiap metode ditentukan oleh nilai pembobotan, dan mempunyai peran dalam prioritas baik penentuan nilai optimal fungsi objektif maupun pencapaian nilai target variabel PLMO .

DAFTAR PUSTAKA

1. Goal Programming .Bank Investment Example., pada www.efzg.globalnet.hr/UserDocsImages/mat/svlah//Handout-4.pdf. 29 Mei 2007..

2. Kosmodio, K ; Z. Constantin Z. 1999. Multicriteria Methodology for Bank Asset Liability Management. Technical University of Dept. Production Engineering & Management University Campus Chania, Greece, pada http://www.google.co.id/multicriteria+methodology. 2 Juli 2007.

3. Lee, K.E . 2002. Optimization with multiple objectives.Industrial and System Engineering, Georgia Institute Computational Research & Informatics, Workshop on Operations Research in Radiation Therapy, Washington DC, pada www.isye.gatech.edu/nci-nsf.orart.2002/pdf-file/talk.lee.pdf. 29 Mei 2007.

4. Ragsdale, T. Cliff . 2004 . Spreadsheet Modelling & Decision : Virginia Polytechnic Institute and State University Analisys, South-Western.

5. Sakawa, Masatoshi.1993. Fuzzy Sets And Interactive Multiobjective Optimization, Applied Information Technologgy: Plenum Press, New York.

6. Zhang,, G. dan Jie Lu. The Definition of Optimal Solution and Extended Kuhn-Tucker Approach, pada www.comp.hkbu.edu.hk/~cib/2005/Nov/iib_vol6no2_article1.pdf. 2 Juli 2007