Getaran sistem pegas berbeban dengan massa yang berubah terhadap waktu

Kunlestiowati H[*]. Nani Yuningsih[**], Sardjito[***]

* Staf Pengajar Polban, kunpolban@yahoo.co.id
** Staf Pengajar Polban, naniyuningsih@gmail.com
*** Staf Pengajar Polban, inarwj@yahoo.com

Unit Pelayanan Mata Kuliah Umum (UP MKU), Politeknik Negeri Bandung
Jl. Gegerkalong Hilir, Ds. Ciwaruga, Bandung 40162
Telp. (62) (22) 2013 789 ext. 267, e-mail: bintoroc@yahoo.com

Abstrak

Getaran sistem pegas berbeban telah banyak dibahas, baik itu berupa getaran bebas, getaran teredam, getaran paksa, maupun getaran paksa teredam. Namun umumnya pembahasan tersebut dibatasi untuk beban bermassa konstan. Pada tulisan ini, akan ditinjau getaran yang terjadi pada pegas berbeban, dengan massa beban yang berubah terhadap waktu. Analisis dimulai dengan membuat model matematis dari getaran bebas pegas berbeban dengan massa beban yang berubah secara linier terhadap waktu. Dari model yang berbentuk persamaan diferensial, diperoleh solusi untuk posisi beban setiap saat berbentuk fungsi periodik logaritmik. Dari solusi ini, diperoleh karakteristik adanya mekanisme relaksasi yang diakibatkan oleh berubahnya massa terhadap waktu. Selanjutnya analisis dilanjutkan pada getaran teredam, getaran paksa, serta getaran paksa teredam; yang seluruhnya menggunakan beban bermassa tidak tetap.

Kata kunci:. Getaran, massa berubah, fungsi periodik logaritmik

Abstract

Vibration of spring-loaded system has been widely discussed, both in the form of free vibration, damped vibration, forced vibration, as well as forced-damped vibration. However, these discussions are generally limited to a constant mass load. In this writing, it will be reviewed about vibration that occurs in the spring load, with varying mass of load versus time. The analysis begins by making a mathematical model of spring loaded free vibration with a load mass changes linearly with time. From the model of differential equations, obtained a solution for load position at any time in the form of a periodic-logaritmic function. From this solution, the acquired characteristics of the relaxation mechanism caused by changes in period of time. Subsequently, the analysis is continued on damped vibration, forced vibration, and forced-damped vibration, that are using the unfixed free mass.

Keywords: *vibration, mass change, periodic-logaritmic function*

1. Pendahuluan

Gerak benda yang bergetar bersama dengan sebuah pegas dapat dikelompokkan menjadi getaran bebas, getaran teredam, getaran paksa, serta getaran paksa teredam. Persamaan gerak yang menghubungkan gaya penyebab gerak serta besaran kinematiknya (posisi, kecepatan, percepatan), dapat diperoleh melalui persamaan gaya, dengan definisi gaya yang sederhana yakni massa dikalikan percepatan. Umumnya massa benda yang bergetar dianggap konstan. Untuk sistem semacam itu, persamaan geraknya yang didapat berupa persamaan diferensial orde dua antara posisi terhadap waktu yang solusinya akan berbentuk fungsi harmonik periodik (sinus dan atau cosinus) atau fungsi eksponensial.

Bila massa benda getar tidak konstan, artinya berubah terhadap waktu, maka tinjauan model persamaan geraknya masih dapat dilakukan melalui persamaan gaya, hanya definisi gaya diperluas menjadi laju perubahan momentum. Model gerak yang berbentuk persamaan diferensial dengan koefisien-koefisien yang bergantung pada waktu menghasilkan solusi yang berbentuk fungsi harmonik (periodik) logaritmik antara posisi terhadap waktu. Dengan mengambil tinjauan massa yang berubah secara linier terhadap waktu, diperoleh kenyataan bahwa benda tetap bergetar secara harmonik hanya periodanya berubah secara logaritmik. Perubahan perioda ini menunjukkan terjadinya relaksasi.

2. Pemodelan System

Getaran benda bermassa konstan

Tinjaulah suatu benda (= beban bermassa) yang dilekatkan pada ujung sebuah pegas. Jika beban yang melekat pada ujung pegas ini disimpangkan dari keadaan seimbang, maka sistem pegas dan beban ini akan menyimpan energi, dan padanya timbul gaya pegas yang akan berusaha memulihkan posisinya ke keadaan seimbang. Jika dari posisi menyimpang ini pegas dilepaskan, maka pegas akan bergerak karena gaya pemulih tersebut, dan energi potensial akan berubah bentuk menjadi energi kinetik. Gerak yang terjadi disebut sebagai Gerak Selaras (Harmonik) Sederhana. Beberapa gerakan benda yang termasuk jenis gerak ini antara lain getaran pegas (seperti telah diuraikan di atas) serta ayunan (bandul) sederhana. Ciri kuantitatif gerak ini adalah terjadinya gerak bolak balik yang bersifat periodik. Bolak balik berarti benda selalu melewati lintasan yang sama dengan arah yang berubah-ubah, sedang periodik ditandai dengan kembalinya benda ke suatu posisi tertentu dalam jangka waktu yang tetap.

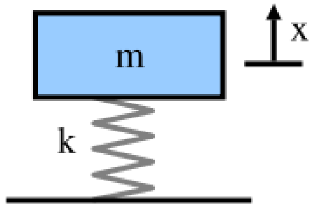
Secara umum getaran benda dapat diklasifikasikan sebagai getaran bebas, getaran teredam, getaran paksa, serta getaran paksa teredam.

Getaran bebas terjadi bila sistem mekanis dimulai dengan gaya awal, lalu dibiarkan bergetar secara bebas. Benda (misalnya beban pada pegas) bergerak hanya karena pengaruh gaya pemulih internal.

Getaran teredam terjadi bila sistem getaran bebas dipengaruhi juga oleh gaya peredam (gaya gesekan, hambatan) yang umumnya bergantung pada kecepatan gerak; artinya besar gaya peredam bergantung pada besar kecepatan sedang arahnya berlawanan. Hal ini berakibat makin kecilnya simpangan pegas untuk perioda berikutnya.

Getaran paksa terjadi bila pada sistem getaran mekanis (misalnya pegas berbeban) bekerja pula gaya luar yang bersifat periodik (gaya bolak-balik). Sedang *getaran paksa teredam* terjadi jika pada sistem getaran mekanis bekerja pula gaya luar yang periodik serta gaya peredam.

Pada model yang paling sederhana, redaman dianggap dapat diabaikan, dan tidak ada gaya luar yang mempengaruhi massa (getaran bebas).



Gambar 1. Pegas dan beban yang bergetar bebas

Dalam keadaan ini gaya yang berlaku pada pegas F_s sebanding dengan panjang peregangan x, sesuai dengan hukum Hooke, atau bila dirumuskan secara matematis :

$$F = -k\,x \quad \text{...} \quad (1)$$

dengan k adalah tetapan pegas.

Karena gaya yang ditimbulkan sebanding dengan percepatan,

$$F = m\,a = m\left(\frac{dv}{dt}\right) = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) \quad \text{...............} \quad (2)$$

maka didapatkan persamaan diferensial homogen berikut:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \text{..................................} \quad (3)$$

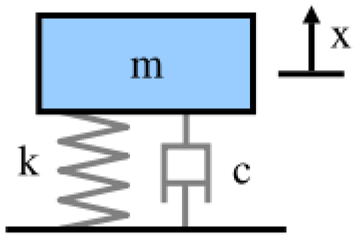
Bila dianggap bahwa getaran sistem dimulai dengan meregangkan pegas sejauh A kemudian melepaskannya (berarti pada saat awal, t = 0, posisi benda berada di x = A), solusi persamaan di atas yang memerikan gerakan massa adalah:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_n t) \quad \text{...........................} \quad (4)$$

Solusi ini menyatakan bahwa beban akan berosilasi dalam gerak harmonis sederhana yang memiliki amplitudo A dan frekuensi f_n ($f_n = \omega / 2\pi$) dengan:

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Bila peredaman diperhitungkan, berarti gaya peredam juga berlaku pada massa selain gaya yang disebabkan oleh peregangan pegas. Gaya redaman (gesekan, hambatan) yang terjadi besarnya bergantung pada besar kecepatan dan arahnya berlawanan dengan kecepatan. Konstanta kesebandingannya dinamakan koefisien peredam (c).



Gambar 2. Pegas & beban serta peredam

$F = -c\,v = -c\frac{dx}{dt}$ ……………………….. (5)

Dengan menjumlahkan semua gaya yang berlaku pada benda , akan didapatkan persamaan

$\frac{d^2x}{dt^2} + c\,\frac{dx}{dt} + kx = 0$ ……………………….. (6)

Solusi persamaan ini tergantung pada besarnya redaman. Bila redaman cukup kecil, solusinya berbentuk bilangan kompleks, sedang sistem masih akan bergetar, namun pada akhirnya akan berhenti. Keadaan ini disebut *kurang redam atau redaman kecil* (*under damping*), dan merupakan kasus yang paling mendapatkan perhatian dalam analisis vibrasi. Bila peredaman diperbesar sehingga mencapai titik saat sistem tidak lagi berosilasi, kita mencapai titik *redaman kritis* (*critical damping*). Bila peredaman ditambahkan melewati titik kritis ini sistem disebut dalam keadaan *lewat redam atau redaman besar* (*over damping*). Untuk kondisi lewat redam dan redaman kritis, solusi persamaan diferensial di atas berbentuk bilangan nyata yang mengecil secara eksponensial terhadap waktu.

Nilai koefisien redaman yang diperlukan untuk mencapai titik redaman kritis pada model massa-pegas-peredam adalah:

$c_c = 2\sqrt{km}$ ……………………………….. (7)

Untuk mengkarakterisasi jumlah peredaman dalam sistem digunakan nisbah yang dinamakan nisbah redaman. Nisbah ini adalah perbandingan antara peredaman sebenarnya terhadap jumlah peredaman yang diperlukan untuk mencapai titik redaman kritis. Rumus untuk nisbah redaman (ζ) adalah

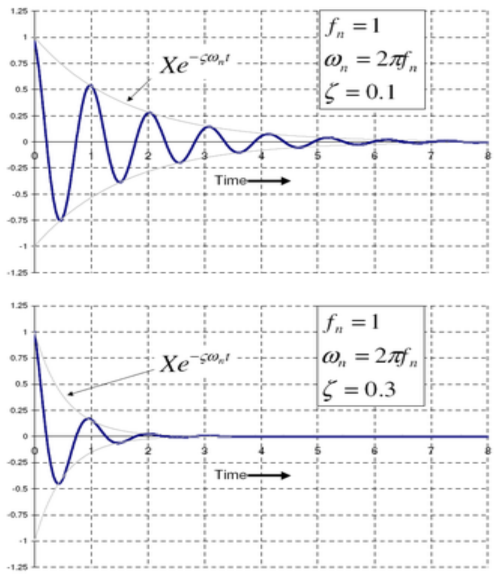
$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}.$ ……………………………….. (8)

Solusi sistem getaran dengan redaman kecil (kurang redam) pada model massa-pegas-peredam adalah

$X(t) = Xe^{-\varsigma\omega_n t}Cos\left(\sqrt{1-\varsigma^2}\,\omega_n t-\phi\right)$ … (9)

$\omega_n = 2\pi f_n$

Dari solusi tersebut perlu diperhatikan dua hal: faktor eksponensial dan fungsi cosinus. Faktor eksponensial (yang notabene merupakan bagian bilangan nyata dari solusi tersebut) menentukan seberapa cepat sistem teredam: semakin besar nisbah redaman, semakin cepat sistem teredam ke titik nol. Fungsi cosinus (yang dihasilkan dari bagian imajiner solusi persamaan) melambangkan osilasi sistem, namun frekuensi osilasi berbeda daripada kasus tidak teredam. Jadi frekuensi getaran teredam berbeda dengan frekuensi getaran bebas.



Gambar 3. Grafik simpangan terhadap waktu untuk getaran teredam

Getaran paksa adalah getaran yang terjadi karena adanya gaya luar yang bekerja pada suatu sistem sehingga sistem tersebut bergetar. Gaya luar ini umumnya bersifat periodik, misalnya berbentuk :

$F = F_0 \cos(2\pi f t).$

Dengan kata lain, gaya ini bernilai maksimum F_o dan memiliki frekuensi f.

Kini dari persamaan gaya dan gerak akan diperoleh persamaan diferensial orde dua tidak homogen, yang mempunyai bentuk :

$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F(t)$ ………………………….. (10)

Persamaan diferensial semacam itu akan memiliki solusi yang merupakan resultan dari solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum memiliki bentuk tepat sama dengan solusi yang diperoleh jika ruas kanan persamaan sama dengan nol. Jadi solusi umum akan berbentuk sama dengan solusi getaran bebas. Solusi khusus memiliki bentuk fungsi yang mirip dengan fungsi yang ada pada ruas kanan persamaan, hanya saja amplitudonya berbeda dengan F_o/m.

Dalam kondisi tunak (*steady state*), biasanya terjadi setelah waktu yang cukup lama, solusi khusus akan lebih dominan; jadi solusi umum persamaan tersebut dapat dianggap bernilai kecil sekali (mendekati nol). Sehingga solusi tunaknya akan berbentuk :

$$X = \{(F_o / m) \;/ [(k/m) - \omega^2]\} \;) \cos (2\pi f t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; (11)$$

Getaran paksa teredam memiliki persamaan gerak yang merupakan hasil perpaduan antara getaran teredam dengan getaran paksa, yakni dalam bentuk :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\,\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (12)$$

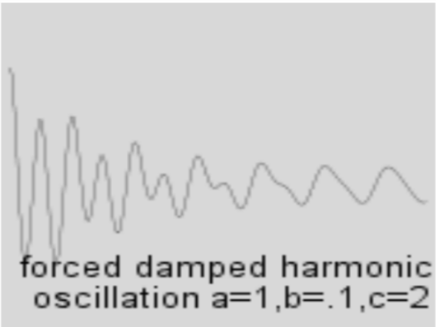
Seperti halnya solusi getaran paksa, solusi persamaan gerak getaran paksa teredampun memiliki dua bagian, yakni solusi umum dan solusi khusus; dan saat mencapai keadaan tunak, solusi khusus yang berbentuk :

$$x(t) = X\cos(2\pi f t - \phi). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (13)$$

dengan amplitudo

$$X = \frac{F_0}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}.$$

akan menjadi dominan. Hasilnya dapat digambarkan seperti terlihat pada gambar berikut.



Gambar 4. Grafik simpangan terhadap waktu untuk getaran paksa teredam

3. Hasil dan Pembahasan

Dari persamaan yang berlaku pada model beban bermassa konstan, diterapkan pada getaran beban bermassa tidak konstan**,** massa benda yang menjadi beban pada sistem getaran pegas beban kini tidak lagi konstan, tetapi berubah terhadap waktu; gaya tidak lagi cukup ditulis sebagai F = m a, tetapi harus berbentuk :

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d\,(m\,v)}{d\,t} = v\left(\frac{d\,m}{d\,t}\right) + m\,(\frac{d\,v}{d\,t}) \quad \ldots \; (14)$$

Dengan demikian, persamaan gerak untuk getaran bebas (yang hanya terdiri dari pegas dan beban, dengan gaya yang berkerja hanya gaya elastik) menjadi :

$$v\left(\frac{d\,m}{d\,t}\right) + m\left(\frac{d\,v}{d\,t}\right) = -\,k\,x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (15)$$

Karena kecepatan adalah : $v = \frac{d\,x}{d\,t}$

Maka persamaan gerak tersebut dapat ditulis dalam bentuk :

$$\left(\frac{d\,m}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,x}{d\,t}\right) + m\left(\frac{d^2x}{d\,t^2}\right) = -\,k\,x$$

Kini, ambillah satu kasus dari massa yang berubah, yakni massa berubah secara linier terhadap waktu, yakni dalam bentuk :

$$m = m_0(\frac{t}{t_0}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (16)$$

Maka, laju perubahannya terhadap waktu

$$\frac{d\,m}{d\,t} = \frac{m_0}{t_0}\;, konstan \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (17)$$

Dengan asumsi bahwa perubahan nilai frekuensi sudut (ω) sangat lah kecil, sehingga tetapan pegas dapat ditulis sebagai

$$k = m\,\omega^2 = m\,(\frac{\theta}{t})^2$$

Maka persamaan gerak untuk getaran bebas yang bermassa linier terhadap waktu akan berbentuk :

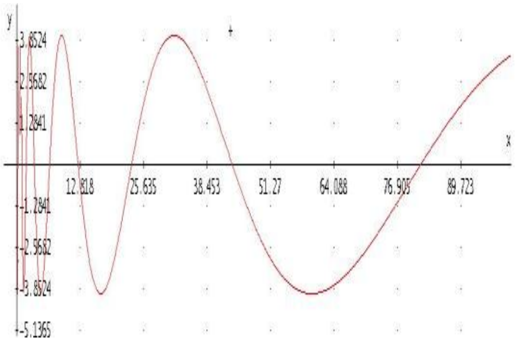
$$t^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + (\,t\,)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \theta^2 x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots. \; (18)$$

Persamaan diferensial ini agak berbeda dari yang biasa dijumpai, karena koefisien dari turunan kedua serta turunan pertama merupakan besaran yang bergantung pada waktu (t^2 dan t). Solusi dari persamaan tersebut berbentuk :

$$x(t) = A\sin\,[\theta\ln(\,D\,t\,)] + B\cos[\theta\ln(\,D\,t\,)] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots. \; (19)$$

dengan A, B dan D merupakan bilangan-bilangan konstan.

Solusi yang berbentuk fungsi osilasi (harmonik) logaritmik ini menjadi spesifik, karena tampilannya yang memperlihatkan adanya mekanisme relaksasi pada domain waktu (artinya nilai periodanya berubah membesar atau melambat secara logaritmik). Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa perubahan massa (yang dalam kasus ini bertambah secara linier terhadap waktu) beban pada sistem getaran mengakibatkan timbulnya gejala relaksasi. Tampilan visual (antara simpangan terhadap waktu) dapat digambarkan sebagai grafik berikut :



Gambar 5. Grafik simpangan terhadap waktu untuk getaran bebas dengan massa yang berubah linier

Terdapat beberapa kasus khusus dimana bentuk ln (1 + x) dapat diambil pendekatannya menjadi x, yakni jika nilai x sangat kecil. Dengan demikian, pada kasus khusus tersebut bentuk ln (D t) dapat diganti menjadi F t (dengan F konstanta), sehingga solusi di atas dapat ditulis sebagai : $x(t) = A\sin\ [\theta\ E\ t] + B\cos[\theta E t]$

yang merupakan solusi dari getaran bebas untuk massa beban konstan.

Dengan cara perhitungan yang mirip dengan pemodelan getaran teredam dari beban bermassa konstan, maka untuk sistem getaran teredam beban bermassa berubah akan menghasilkan persamaan gerak :

$$t^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(t + \frac{ct^2}{m}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \theta^2 x = 0 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Sedang sistem getaran paksa dari beban bermassa berubah mempunyai persamaan gerak :

$$t^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + (\,t\,)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \theta^2 x = (\,F_L\,) \quad \ldots\ldots. \quad (21)$$

Dan untuk gaya luar yang berubah secara periodik, misalnya berbentuk sinusoida terhadap waktu :

$$F_L = F_{LM}\sin\omega_P\ t$$

persamaan geraknya akan berbentuk :

$$t^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + (\,t\,)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \theta^2 x = (\,F_{LM}\sin\omega_P\ t\,) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

dengan solusi lengkap yang merupakan penjumlahan solusi umum dan solusi khusus, yakni :

$$x(t) = A\sin\ [\theta\ln(\,D\ t\,)] + B\cos[\theta\ln(\,D\ t\,)] + E\cos\omega_P\ t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (23)$$

Getaran paksa teredam dari beban bermassa berubah, akan mempunyai persamaan gerak :

$$t^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(t + \frac{ct^2}{m}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \theta^2 x = \left(\frac{t^2}{m}\right)(\,F_L\,) \quad \ldots\ldots\ldots.. \quad (24)$$

Dan jika :

$$F_L = F_{LM}\sin\omega_P\ t$$

diperoleh persamaan gerak lengkapnya sebagai :

$$t^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(t + \frac{ct^2}{m}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \theta^2 x = \left(\frac{t^2}{m}\right)(\,F_{LM}\sin\omega_P\ t\,)$$

Pemodelan persamaan gerak serta solusi yang diperoleh di atas menjadi satu hal yang menarik mengingat adanya kenyataan bahwa fungsi osilasi harmonik logaritmik juga merupakan solusi dari Persamaan Voight

(Sornette & Sammis, 1995)[1]. Persamaan Voight sendiri berbentuk :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Persamaan Voight sering digunakan untuk merumuskan berbagai fenomena fisis yang mengikuti Hukum Pangkat (*Power Law*), seperti peristiwa keretakan struktur, gempa bumi, longsor, hingga ke peristiwa-peristiwa ekonomi dan keuangan [2]. Dengan demikian, dapat diperkirakan bahwa sistem getaranpun dengan solusi berupa fungsi osilasi harmonik logaritmikpun dapat digunakan untuk menjelaskan fenomena-fenomena tersebut.

4. Kesimpulan

Sistem pegas dengan beban bermassa dapat menghasilkan gerak getaran yang ditandai dengan berubahnya posisi beban terhadap waktu mengikuti fungsi osilasi harmonik logaritmik. Jika massa beban konstan, maka fungsi posisi terhadap waktu akan berbentuk harmonik murni (sinus dan/atau cosinus). Massa beban yang berubah secara linier mengakibatkan terjadinya relaksasi perioda getaran.

Perlu diteliti lebih lanjut pengaruh massa yang berubah secara umum terhadap waktu pada bentuk solusi persamaan getaran, karena dalam penelitian ini baru ditinjau massa yang berubah secara linier terhadap waktu. Selain itu perlu dihitung secara lebih rinci solusi bagi getaran teredam serta getaran paksa teredam untuk beban yang massanya berubah.

Ucapan terima kasih

Tulisan ini merupakan bagian dari kegiatan penelitian yang berjudul "Penerapan model getaran pegas pada fenomena fluktuasi nilai valuta asing". Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada Manajemen Politeknik Negeri Bandung, khususnya Unit Penelitian dan Pengabdian pada Masyarakat (UPPM) yang telah memberikan kesempatan kepada kami untuk melakukan penelitian ini melalui Pendanaan Penelitian Terapan Politeknik Negeri Bandung Tahun Anggaran 2010.

Referensi

[1] Pralong A., Birrer C., Stahel W.W., Funk M., *On the predictability of ice avalanches*, Nonlinear Processes in Geophysics, 12, pp 849–861, 2005.

[2] Canessa E., *Stock market and motion of a mass spring*, http//:arXiv.0905.4450vl (q.fin.ST), 27 May 2009