Kajian Dasar Integral dan Turunan Fraksional Riemann-Liouville

Muhamad Deni Johansyah[1], Julita Nahar[2]
Asep K. Supriatna[3], Sudradjat Supian[4]

[1]*Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Padjadjaran*
email: muhamad.deni@unpad.ac.id
[2]*Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Padjadjaran*
email: julitanahar2017@gmail.com
[3]*Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Padjadjaran*
email: ak_supriatna@unpad.ac.id
[4]*Departemen Matematika, FMIPA, Universitas Padjadjaran*
email: sudradjat@unpad.ac.id

ABSTRAK

Orde dari integral dan turunan dari suatu fungsi secara sederhana senantiasa dihubungkan dengan bilangan asli. Artinya jika diberikan sebuah fungsi, maka kita dapat menentukan integral dan turunan ke orde satu, kedua, ketiga dan seterusnya. Ide generalisasi dari konsep ini adalah bagaimana menentukan integral dan turunan yang berorde suatu bilangan pecahan (fraksional) yaitu bilangan rasional atau bahkan bilangan real. Dalam makalah ini dijelaskan definisi dan teorema yang berhubungan dengan integral dan turunan fraksional yang dikembangkan oleh matematikawan Riemann dan Liouville serta caputo. Metode penelitian yang ditempuh adalah melalui studi literatur primer, yaitu dengan mengembangkan teori yang telah dikerjakan peneliti terdahulu sehingga diharapkan akan diperoleh teori baru yang dapat diaplikasikan dan dikembangkan secara lebih luas. Tujuan dari penelitian adalah untuk mengkaji dan mengetahui definisi, karakteristik dan sifat integral dan turunan fraksional, sehingga diharapkan dapat berkontribusi secara mendasar pada bidang ilmu matematika dengan penekanan pada gagasan yang sangat fundamental. Hasil dari makalah ini berupa kajian teori dan analisis dari integral dan turunan fraksional. Menurut Riemann-Liouville bahwa turunan fraksional suatu konstanta tidaklah nol, sedangkan menurut Caputo turunan fraksional dari konstanta adalah nol.

Kata Kunci
Integral fraksional, turunan fraksional

1. PENDAHULUAN

Integral dan turunan merupakan bagian dari pada Kalkulus dalam Ilmu Matematika yang kajian teori dan aplikasinya sangatlah luas, termasuk dalam bidang teknik dan industri maupun Ekonomi. Namun demikian orde dari integral dan turunan tersebut pada umumnya (termasuk yang diberikan kepada mahasiswa dalam perkuliahan formal), merupakan bilangan asli. Padahal merupakan tantangan besar bagi para matematikawan untuk memperluas orde dari integral dan turunan tersebut mejadi bilangan rasional bahkan bilangan real. Dalam makalah ini akan dikaji integral dan turunan yang berorde fraksional, yaitu orde integral dan turunan berupa bilangan rasional untuk fungsi f(x) = x^m, dengan m = 0,1 dan 2.

Hasil kajian pada makalah ini, diharapkan dapat menjadi dasar bagi penelitian tahap selanjutnya yang kajiannya lebih menitik beratkan pada masalah implementasi. Selain itu, tujuan jangka panjang dari kajian ini adalah untuk mendapatkan bahan ajar kuliah yang dapat dipertimbangkan untuk dimasukkan pada silabus mata kuliah Persamaan Diferensial Biasa yang akan diberikan kepada mahasiswa pada Program Studi S-1 Matematika. Hal ini dilakukan agar mahasiswa mendapatkan ilmu yang utuh dari sisi materi Integral, Turunan dan Persamaan Diferensial, yaitu meliputi orde bilangan asli maupun fraksional. Demikian juga dari sisi aplikasi, mahasiswa diharapkan termotivasi untuk mempelajari ilmu ini karena fakta menunjukkan cukup banyak aplikasinya baik dalam bidang ekonomi maupun teknik. Hemat kami, kajian ini akan sangat penting karena hasilnya akan digunakan untuk melengkapi kajian teori dari Integral, turunan dan Persamaan Diferensial yang sudah ada yaitu yang berorde bilangan asli. Dengan demikian kajian integral, turunan dan Persamaan Diferensial akan menjadi lengkap, meliputi orde bilangan asli dan bilangan rasional.

Sehingga penulisan makalah ini diharapkan berkontribusi secara mendasar pada bidang ilmu matematika khususnya bidang kalkulus dengan penekanan pada gagasan yang sangat fundamental.

2. KAJIAN LITERATUR

2.1 Kalkulus Fraksional

Pada [6] kalkulus fraksional memberikan jawaban atas pertanyaan apakah berlaku sama operasi turunan bilangan bulat ber-orde *n* dengan *n* bukan bilangan bulat. Pertanyaan ini pertama kali dikemukakan oleh L'Hopital pada 30 September 1695. Pada saat itu, di dalam surat kepada Leibniz, dia bertanya tentang $\frac{d^n x}{dx^n}$, notasi Leibniz untuk

turunan n pada fungsi linear $f(x) = x$. L'Hopital bertanya bagaimana hasilnya jika $= \frac{1}{2}$. Leibniz menjawab itu akan menjadi "sebuah paradox, yang mana suatu hari konsekuensinya akan diputuskan".

Menurut diskusi yang belum pernah terjadi sebelumnya, kalkulus fraksional menarik perhatian para matematikawan lainnya, banyak dari mereka yang seacara langsung atau tidak langsung berkontribusi untuk pengembangannya. Mereka adalah Euler, Laplace, Fourier, Lacroix, Abel, Riemann, dan Liouville.

Di tahun 1819, Lacroix menjadi matematikawan pertama yang memunculkan sebuah paper tentang turunan fraksional.

Dimulai dengan $= x^m$, dimana m adalah bilangan bulat positif, Lacroix menemukan turunan ke n adalah

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, m \geq n. \qquad (2.1)$$

dan dengan menggunakan simbol Lengendre Γ, untuk faktorial umum, Lacroix menuliskan

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \qquad (2.2)$$

dengan $m = 1$ dan $n = \frac{1}{2}$, diperoleh:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

2.2 Integral dan Derivatif Fraksional

Dalam [9], integral dan derivatif fraksional adalah suatu integral dan derivatif dengan orde fraksional (sebarang). Terdapat beberapa pendekatan untuk menotasikan derivatif berorde fraksional antara lain yaitu Riemann-Liouville, Caputo, dan Grunwald-Letnikov. Dalam makalah ini akan dibahas hanya integral dan derivatif fraksional Riemann-Liouville dan Caputo.

Definisi Integral fraksional Riemann-Liouville dan definisi dari turunan fraksional telah ada semenjak dua abad terakhir. Sebagai contoh, diantaranya adalah Adam Loverro dalam [1] yang mengulas tentang sejarah, definisi dan aplikasi dari integral dan turunan fraksional dalam bidang teknik. Juga dalam Kimeu[5] membahas tentang integral fraksional dan turunan fraksional serta aplikasinya dalam mengontrol suhu pada sistem aliran panas, sedangkan aplikasi dari integral dan turunan fraksional dibidang ekonomi dinamis diantaranya menentukan elastisitas harga permintaan. Dalam [1] beberapa definisi yang berkaitan dengan turunan fraksional diantaranya integral fraksional atau turunan fraksional negatif yang dikemukakan oleh *Riemann-Liouville* didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1
Misalkan α bilangan real, integral fraksional orde α dari fungsi f(x) adalah

$$J^\alpha f(x) = D^{-\alpha} f(x)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \qquad (2.3)$$

dengan $\alpha > 0$.Sedangkan untuk $\alpha \geq 0$, dan $\beta \geq 0$, integral fraksional yang dikemukakan Riemann-Liouville memiliki sifat sebagai berikuta :

1. $J^\alpha J^\beta f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x)$
2. $J^\alpha J^\beta f(x) = J^\beta J^\alpha f(x)$

Defnisi 2.2.2.
Derivatif fraksional Riemann-Liouville didefinisikan sebagai

$$D_{x_0}^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n}[J^{n-\alpha} f(x)] \qquad (2.4)$$

$$D_{x_0}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} [\int_{x_0}^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt\,] \qquad (2.5)$$

dengan α orde sebarang, $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in Z^+$, x_0 batas bawah, $x_0 < x$, $x>0$, dan D^α operator derivatif fraksional berorde α.

Derivatif fraksional Riemann-Liouville mempunyai kekurangan untuk memodelkan peristiwa dalam dunia nyata, dikarenakan memerlukan definisi syarat batas dan nilai awal berorde fraksional. Syarat batas dan nilai awal berorde fraksional belum mempunyai interpretasi yang jelas dalam kehidupan nyata, sehingga diperkenalkan derivatif fraksional Caputo sebagai alternatif.

Adapun untuk turunan fraksional positifnya didefinisikan oleh Caputo yang merupakan modifikasi dari Riemann-Liouville yaitu sebagai berikut.

Definisi 2.2.3
Misalkan α bilangan real, dan $n-1 < \alpha \leq n$, di mana n adalah bilangan asli, turunan fraksional orde α dari f(x) terhadap x

$$D^\alpha f(x) = J^{n-\alpha} D^n f(x)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt \qquad (2.6)$$

3. METODE PENELITIAN

Metode penelitian dalam bidang ilmu Matematika cenderung lebih pada kajian teoritis melalui cara berfikir *kritis* dan *logis*. Metode penelitian yang ditempuh adalah melalui studi literatur primer, yaitu dengan mengembangkan teori yang telah dikerjakan peneliti terdahulu sehingga diharapkan akan diperoleh teori baru yang dapat diaplikasikan dan dikembangkan secara lebih luas.

Metode bersifat aksiomatik, yang dibagi menjadi dua bagian besar yaitu analisis fungsional yang bertujuan untuk menunjukkan secara teoritis bahwa solusi dari suatu turunan fraksional adalah ada dan tunggal.
Penelitian ini akan dilakukan dalam dua tahap, yaitu:

1. Mengkaji ulang hasil-hasil yang telah dicapai pada penelitian terdahulu. Hal ini diperlukan untuk

menentukan dan menetapkan sasaran apa yang akan dicapai pada penelitian berikutnya. Kajian akan dilakukan melalui text book, jurnal, ataupun media lainnya.

2. Melakukan kajian analisis untuk menjamin eksistensi solusi, yang dilengkapi dengan metode mencari solusi. Hal ini dilakukan melalui aktivitas berupa penelusuran berbagai pustaka yang menunjang dan berkaitan dengan masalah yang dihadapi.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam [6] bahwa integral fraksional berorde α dari fungsi polinom sederhana yang berbentuk f(x) = x^m, menurut Riemann-Liouville dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian fungsi gamma dengan fungsi polinom sebagai berikut**:**

Persamaan (2.3) untuk x_0 = 0 dan f(x) = x^m diperoleh:

$$J_0^{\alpha} f(x) = D^{-\alpha}x^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, t^m\, dt \quad (4.1)$$

Sehingga kita dapat menghitung $D^{-\alpha}x^m$, dimana $\alpha > 0$, $m > -1$. Sebagai berikut

$$D^{-\alpha}x^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, t^m$$

$$D^{-\alpha}x^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (1-\frac{t}{x})^{\alpha-1} x^{\alpha-1}\, t^m dt$$

Jika t = xu , untuk t= 0 → u = 0
dt= xdu , untuk t= x → u = 1 , maka diperoleh

$$D^{-\alpha}x^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} x^{\alpha-1}\, (xu)^m\, x\, du,$$

$$D^{-\alpha}x^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{m+\alpha}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}\, (u)^m du$$

$$D^{-\alpha}x^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{m+\alpha} B(m+1,\alpha)$$

$$D^{-\alpha}x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} x^{m+\alpha}$$

Sehingga integral fraksional berorde α dari fungsi polinom sederhana yang berbentuk f(x) = x^m menurut dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian fungsi gamma dengan fungsi polinom yang dapat dinyatakann dalam teorema berikut **:**

Teorema 4.1:

Integral fraksional berorde α dari fungsi polinom sederhana yang berbentuk f(x) = x^m adalah

$$D^{-\alpha}x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} x^{m+\alpha}\, , untuk\ \alpha > 0,$$

$$m > -1, x > 0 \quad (4.1)$$

Kita lihat teorema (4.1) menginformasikan kita, bahwa integral fraksional dari suatu k yang konstan berorde α adalah

$$D^{-\alpha}k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} \quad (2.6)$$

Dan secara khususnya, jika $\alpha = \frac{1}{2}$, maka dengan menggunakan teorema (4.1) diperoleh:

$$D^{-1/2}x^0 = \frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma(0+\frac{1}{2}+1)} x^{0+\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\sqrt{x} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$$D^{-1/2}x^1 = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1+\frac{1}{2}+1)} x^{1+\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} x^{3/2}$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$$

$$D^{-1/2}x^2 = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2+\frac{1}{2}+1)} x^{2+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(7/2)} x^{5/2}$$

$$= \frac{\Gamma(3)}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}$$

Fungsi turunan fraksional bisa diartikan dengan menggunakan definisi integrasi fungsi. Sampai saat ini, asumsi bahwa $\alpha = n - u$, dimana $0 < \alpha < 1$ dan n adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari u. Lalu, fungsi turunan $f(x)$ dari urutan u adalah:

$$D^u f(x) = D^n[D^{-\alpha} f(x)] \quad (4.1)$$

Asumsikan kita ingin mencari fungsi turunan $f(x) = x^m$ untuk turunan α, dimana $m \geq 0$. Perhatikan apabila kita ingin menggu teorema (4.1), kita harus menukar u dan α, misalkan $u = n - \alpha$, di mana $0 < u < 1$. Lalu kita punya $n = 1$ dan $u = 1 - \alpha$. Maka,

$$D^{\alpha} f(x) = D^1[D^{-(1-\alpha)} f(x)]$$

$$= D^1[D^{-(1-\alpha)} x^m]$$

$$= D^1[\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma((m-\alpha+1)+1)} x^{m-\alpha+1}]$$

$$= (m-\alpha+1)\frac{\Gamma(m+1)}{(m-\alpha+1)\Gamma(m-\alpha+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} x^{m-\alpha}$$

Sehingga turunan fraksional berorde α dari fungsi polinom sederhana yang berbentuk

f(x) = x^m , dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian fungsi gamma dengan fungsi polinom yang dapat dinyatakan dalam teorema berikut**:**

Teorema 4.2:

Turunan fraksional berorde α dari fungsi polinom sederhana yang berbentuk f(x) = x^m adalah

$$D^{\alpha}x^{m} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}x^{m-\alpha},$$

untuk $m \geq 0,\ 0 < \alpha < 1$ (4.2)

Secara khusus, akan dibahas turunan fraksional dengan menggunakan teorema 4.2, definisi 2.2.2 dan definisi 2.2.3, untuk turunan orde $\alpha = ½$ dari $f(x) = x^m$, dengan $m = 0,1,2$.

Perhatikan bahwa dengan menggunakan persamaan 4.2 dari turunan fungsi Reimann-Louville, maka turunan orde $\alpha = ½$ untuk fungsi konstan tidak sama dengan nol. Perhatikan tabel 4.1 bahwa hasil dari persamaan 4.1, persamaan 4.2 tersebut memberikan hasil yang sama.

Table 4.1 Tabel Kajian Integral dan Turunan Fraksioanal

$f(x)$	$D^{1/2}\,f(x) = D^{1}[D^{-1/2}f(x)]$	$D^{1/2}x^{m} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-1/2+1)}x^{m-1/2}$
x^0	$D^{1/2}\,x^0 = D^1\left[2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$	$D^{1/2}x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1/2)}x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$
x^1	$D^{1/2}\,x^1 = D^1\left[\frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}\right] = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$	$D^{1/2}x^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)}x^{1/2} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$
x^2	$D^{1/2}\,x^2 = D^1\left[\frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}\right] = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$	$D^{1/2}x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5/2)}x^{3/2} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$

Selanjutnya akan dibahas cara mencari Integral fraksional dengan menggunakan definisi 2.2.1, dan mencari turunan fraksional dengan menggunakan definisi 2.2.2 dan definisi 2.2.3, untuk turunan fraksional berorde $\alpha = ½$ dari $f(x) = x^m$, dengan $m = 0,1,2$, sebagai berikut:

a. Menggunakan definisi 2.2.1:

Misalkan α bilangan real, integral fraksional orde α dari fungsi $f(x)$ adalah

$$J^{\alpha}f(x) = D^{-\alpha}f(x),$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,f(t)\,dt$$

dengan $\alpha > 0$.Sehingga diperoleh:

1) $D^{-½}\,x^0 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,{}_0\int^{x}(x-t)^{½-1}\,.\,t^0\,dt$

$D^{-½}\,x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,{}_0\int^{x}(x-t)^{-½}\,.\,1.\,dt = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$

2) $D^{-½}\,x^1 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,{}_o\int^{x}(x-t)^{\frac{1}{2}-1}\,.\,t\,dt$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,{}_o\int^{x}(x-t)^{-\frac{1}{2}}\,.\,t\,dt = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$

3) $D^{-½}\,x^2 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,{}_o\int^{x}(x-t)^{½-1}\,t^2\,dt$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,{}_o\int^{x}(x-t)^{-½}\,.\,t^2\,dt$

misal : t = xu , x=0 →t = 0

dt = xdu, u=x → t=1

$D^{-½}\,x^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,{}_o\int^{1}(x - xu)^{-½}\,x^2u^2\,.\,xdu$

$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,{}_o\int^{1}(x\,(1-u))^{-½}\,x^3u^2\,du$

$= \frac{x^{3-½}}{\sqrt{\pi}}\,{}_o\int^{1}u^2.(1-u)^{-½}\,du$

$D^{-½}\,x^2 = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,\beta(3,\frac{1}{2}) = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,.\frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$

$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{2\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}$

b. Menggunakan defnisi 2.2.2

Derivatif fraksional Riemann-Liouville didefinisikan sebagai

$$D^{\alpha}_{x_0}f(x) = \frac{d^n}{dx^n}[J^{n-\alpha}f(x)], \qquad (2.4)$$

$$D^{\alpha}_{x_0}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\left[\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}\,f(t)\,dt\,\right] \qquad (2.5)$$

dengan α orde sebarang, $n-1 \leq \alpha < n$, $n \in Z^{+}$, x_0 batas bawah, $x_0 < x$, $x > 0$, dan D^{α} operator diferensial fraksional berorde α. Sehingga turunan fraksional berorde $\alpha = ½$, untuk $x_0 = 0$ dari $f(x) = x^m$, dengan $m = 0,1,2$, sebagai berikut:

diperoleh:

1) $D^{½}x^0 = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\,f(t)\,dt\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_0^x (x-t)^{1-½-1}.x^0\,dt\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x (x-t)^{-½}\,dt\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \int_0^x (x-t)^{-½}\,1\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,2\,.\,(x-t)^{\frac{1}{2}}\,|_0^x\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,(0-\sqrt{x})\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\right]$

$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,x^{-½} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$

2) $D^{½}x^1 = \frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\,f(t)\,dt\right]$

$= \frac{d^1}{dx^1}\left[\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_0^x (x-t)^{1-½-1}\,t\,dt\right]$

$D^{½}x^1 = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^x \frac{t}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}\,dt\right]$

Misal: t = xu, untuk t= 0 → ux = 0
dt= x du, untuk t= x → xu = t

$$D^{½}x^1 = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{xu}{(x-xu)^{\frac{1}{2}}}\,.xdu\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{x^2u}{x^{½}\,(1-u)^{\frac{1}{2}}}\,du\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 u^1\,(1-u)^{-½}\,du\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 u^{2-1}\,(1-u)^{½-1}\,du\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,B\,(2,\tfrac{1}{2})\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})}\right]$$
$$D^{½}x^1 = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}\right] = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$D^{½}x^1 = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\,\frac{3}{2}\,x^{½} = \frac{2\,x^{½}}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$$3)D^{½}x^2 = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\Gamma\,(0{,}5)}\int_0^x (x-t)^{1-\,0{,}5-1}.t^2\,dt\right]$$

Misal: t = xu , untuk t= 0 → u = 0
dt= xdu , untuk t= x → u = 1

$$D^{½}x^2 = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (x-xu)^{-0{,}5}.u^2.x^2\,.x\,du\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 x^{-\,0{,}5}.\,(1-u)^{-0{,}5}\,.u^2.x^3\,du\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,x^{2{,}5}\int_0^1 (1-u)^{-0{,}5}\,.u^2\,du\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,x^{\frac{5}{2}}\int_0^1 (1-u)^{0{,}5-1}\,.u^{3-1}\,du\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,x^{\frac{5}{2}}.\,B\,(\tfrac{1}{2}\,.\tfrac{6}{2})\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,x^{\frac{5}{2}}.\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\,\Gamma(3)}{\Gamma\,(\frac{7}{2})}\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,x^{\frac{5}{2}}\,\frac{\sqrt{\pi}\,(2)}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}\right] = \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\,\frac{d\,(x^{\frac{5}{2}})}{dx} = \frac{16}{15\sqrt{\pi}}\,.\,\frac{5}{2}\,x^{\frac{3}{2}}$$
$$D^{½}x^2 = \frac{8\sqrt{x^3}}{3\,\sqrt{\pi}} = \frac{8}{3}\,\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$$

c. Menggunakan definisi 2.2.3

Turunan fraksional positifnya didefinisikan oleh Caputo yang merupakan modifikasi dari Riemann-Liouville yaitu sebagai berikut.

Definisi 2.2.3
Misalkan α bilangan real, dan n − 1 ≤ α < n, dimana n adalah bilangan asli,turunan fraksional orde α dari $f(x)$ terhadap x

$$D^{\alpha}f(x) = J^{n-\alpha}D^n f(x)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}\,f^{(n)}(t)\,dt$$

Sehingga diperoleh:

$$1)\ D^{½}\,x^0 = \frac{1}{\Gamma\,(1-0{,}5)}\int_0^x (x-t)^{1-0{,}5-1}\,f'(t)dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma\,(\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-½}\,.\,0.\,\mathrm{dt}\ = 0$$
$$2)\ D^{½}x^1 = \frac{1}{\Gamma\,(1-\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-½}\,f'\,(t)$$
$$= \frac{1}{\Gamma\,(\frac{1}{2})}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\,.1.\,dt = 2\,\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

$$3)\ D^{½}\,x^2 = \frac{1}{\Gamma\,(1-\frac{1}{2})}\int_0^x (x-t)^{-½}\,f'\,(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma\,(\frac{1}{2})}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\,.2t.\,dt = \frac{8}{3}\,x\,\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}$$

Dengan demikian turunan fraksional yang didefinisikan oleh Caputo berlaku : $D^{\alpha}C = 0$

Sedangkan dalam [2] didefinisikan bahwa $\mathcal{A} = (\alpha)$ adalah satu himpunan fungsi konstanta turunan riil D_t^{α} dan $\mathcal{C}\,(\alpha)$ adalah konstanta umum dari indeks α. Jadi, misalnya kita memperhatikan dua fungsi:

$f\,(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ dan $f\,(t) = \mathcal{C}$ dengan menggunakan turunan fraksional persamaan 4.2 yaitu

$$D^{\alpha}x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}x^{m-\alpha},\ \text{untuk}\ m \geq 0, 0 < \alpha < 1$$

diperoleh:

$$D^{-\frac{1}{2}}\left[\ t^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)}x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(0)}t^{-1}\ = 0$$

Karena $\Gamma(0) = \infty$, sehingga $\frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{\Gamma(0)}t^{-1} = 0$. Dengan demikian, fungsi tertentu secara efektif turunannya adalah konstanta 0, kemudian perhatikan contoh kedua berikut:

$$D_t^{\frac{1}{2}}[C] = D^{\frac{1}{2}}\,[\,C\,.\,t^0] = C\,\frac{\Gamma(0+1)}{\Gamma\left(0-\frac{1}{2}+1\right)}\,t^{-\frac{1}{2}}$$
$$= C\,\frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}t^{-\frac{1}{2}}\ = \frac{C}{\sqrt{\pi t}}$$

disini kita lihat bahwa turunan fraksional suatu konstanta tidaklah "konstan".

5. KESIMPULAN

1. Turunan fraksional adalah bentuk yang lebih umum dari Turunan bilangan bulat. Berbeda dengan turunan bilangan bulat dimana operasi berpusat pada bilangan bulat, akan tetapi turunan fraksional menganggap setiap bilangan adalah real, $\alpha > 0$.
2. Menurut Riemann-Liouville turunan fraksional suatu konstanta tidaklah nol, sedangkan menurut Caputo turunan fraksional dari konstanta adalah nol.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kepada Rektor Unpad yang telah memberikan bantuan melaului hibah internal RFU(Riset Fundamental Unpad) tahun 2017.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adam Loverro, 2004, Fractional Calculus: History, Definitions, and Applications for the Engineer, University of Notre Dame.

[2] Bologna, Mauro, 2015, Short Introduction to Fractional Calculus.Chile: Universidad de Tarapaca. Available 20 May 2015. https://www.researchgate.net/profile/Mauro_Bologna2/publication/268373751_Short_Introduction_to_Fractional_Calculus/links/555c7b3508ae91e75e77931f.pdf

[3] E. Rusyaman, H. Gunawan, A.K. Supriatna, dan R.E. Siregar, 2009, A 2-D Interpolation Method That Minimizes An Energy Integral, Presented at IICMA in Yogyakarta.

[4] Indian Electronic These and Dissertations. Chapter 1: Introduction to Fractional Calculus. http://shodhganga.inflibnet.ac.in/bitstream/10603/9663/7/07_chapter%201.pdf

[5] Ishteva, Mariya Kamenova, 2005, Properties and Applications of the Caputo Fractional Operator (Thesis). Bulgaria: Department of Mathematics. Universitas Karlsrube (TH) February 2005. http://homepages.vub.ac.be/~mishteva/papers/Ishteva_MScThesis.pdf

[6] Kimeu, Joseph. 2009. Fractional Calculus: Defnitions and Applications (Thesis). Kentucky: The Faculty of the Department of Mathematics. Western Kentucky University.http://digitalcommons.wku.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1115&context=theses.

[7] Kisela, Thomas, 2008, Fractional Differential Equations and Their Applications (Thesis). Brno, Czech Republic: Faculty of Mechanical Engineering Institute of Mathematics. BRNO University of Technology.https://www.researchgate.net/profile/Tomas_Kisela/publication/249993249_Fractional_Differential_Equations_and_Their_Applications/links/00b7d51e821756d8fb000000.pdf

[8] McTier, Austin, 2016, Fractional Calculus Fundamentals and Applications in Economic Modeling (Thesis). Georgia: Georgia College and State University. 12 December 2016. https://www.gcsu.edu/sites/files/page-assets/node-808/attachments/mctier.pdf

[9] Podlubny, Igor, 1999, Fractional Differential Equations, *Technical University of Kosice, Slovakia, Academic Press*