

Kekonvergenan Perluasan Barisan Rasio Fibonacci Melalui Pendekatan Geometri

Kankan Parmikanti¹, E. Rusyaman²

¹Prodi Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran, Bandung
E-mail : parmikanti@unpad.ac.id

²Prodi Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran, Bandung
E-mail : rusyaman@unpad.ac.id

ABSTRAK

Perluasan Barisan Fibonacci adalah (y_n) di mana $y_{n+1} = \alpha y_n + \beta y_{n-1}$ dengan syarat awal y_1 dan y_2 , serta α dan β bilangan real. Menarik untuk dikaji masalah kekonvergenan perluasan barisan Rasio Fibonacci yaitu barisan rasio suku-suku yang berurutan dari perluasan barisan Fibonacci. Tujuan makalah ini adalah untuk membuktikan eksistensi dan sekaligus menentukan titik kekonvergenan barisan Rasio tersebut melalui metode pendekatan geometri. Pendekatan geometri ini menggunakan satu nilai suku awal yang diproyeksikan ke kurva hiperbola yang bersesuaian dan dilanjutkan proyeksi ke garis $y = x$ secara iteratif. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa titik kekonvergenan barisan rasio akan memiliki kemungkinan dua titik yang berbeda, tergantung pada α dan β .

Kata Kunci

Fibonacci, rasio, perluasan, konvergensi, geometri.

1. PENDAHULUAN

Barisan Fibonacci yang memiliki bentuk persamaan rekursif

$$y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$$

telah cukup banyak menarik perhatian para ahli matematika. Terbukti telah banyak yang memperluas dan memperumum barisan ini dengan menambahkan koefisien sebagai pengali pada suku-suku sebelumnya [1, 6, 8]. Demikian juga masalah konvergensi dari barisan rasio, baik rasio Fibonacci [2], maupun rasio perluasan Fibonacci [6,7] telah banyak diulas. Telah dikaji dalam makalah [4,5] bahwa perluasan barisan Fibonacci memiliki bentuk umum (y_n) di mana

$$y_{n+1} = \alpha y_n + \beta y_{n-1}$$

dengan syarat awal y_1 dan y_2 , serta α dan β bilangan real.

Barisan rasio nya adalah (r_n) di mana

$$r_n = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \alpha + \frac{\beta}{r_{n-1}}$$

dengan $y_n \neq 0 \quad \forall n$. Apabila (r_n) diasumsikan konvergen ke r , maka akan memenuhi persamaan

$$r = \alpha + \frac{\beta}{r},$$

yang identik dengan persamaan kuadrat

$$r^2 - \alpha r - \beta = 0$$

sehingga nilai r yang bisa diklaim sebagai titik konvergennya adalah

$$r^* = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} \quad \text{atau} \quad r^{**} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}.$$

Dengan demikian diperoleh syarat perlu bahwa agar (r_n) konvergen haruslah

$$\alpha^2 + 4\beta \geq 0.$$

Makalah ini bertujuan untuk memberikan bukti alternatif melalui pendekatan geometri dengan cara mengklasifikasi nilai α dan β yang memenuhi syarat perlu tersebut, sehingga dapat diketahui titik konvergensi dari barisan rasio perluasan Fibonacci.

2. PERMASALAHAN

Mengingat konvergensi suatu barisan adalah tunggal [3], maka titik konvergensi (r_n) hanya mempunyai dua kemungkinan yakni r^* atau r^{**} , yang mana hal ini akan sangat tergantung kepada nilai α dan β . Dengan demikian akan ada empat kasus yang berbeda yaitu:

kasus-1: $\alpha > 0 \quad \beta > 0$,

kasus-2: $\alpha < 0 \quad \beta > 0$,

kasus-3: $\alpha > 0 \quad \beta < 0$,

kasus-4: $\alpha < 0 \quad \beta < 0$.

Dalam makalah ini, untuk membahas ke-4 kasus di atas penulis melakukan pendekatan geometris. Pendekatan tersebut bertujuan untuk melihat pergerakan/perubahan nilai suku-suku dalam barisan r_n ketika diberikan suatu nilai awal r_1 . Dengan demikian dalam grafik akan terlihat bahwa nilai-nilai r_1, r_2, r_3, \dots menuju ke suatu nilai tertentu r^* atau r^{**} yang akan menjadi titik konvergensi.

Untuk mendapatkan grafik pada metode geometri ini, pertama-tama kita lihat kembali bentuk relasi rekurensi dari barisan rasio perluasan Fibonacci, yaitu :

$$r_n = \alpha + \frac{\beta}{r_{n-1}} \text{ untuk } n \geq 2. \quad \dots(1)$$

Karena nilai r_n akan tergantung pada r_{n-1} , maka kita bisa ekuivalenkan dengan membuat fungsi hiperbola y yang tergantung pada x , sehingga fungsi hiperbola dimaksud kita peroleh:

$$y = \alpha + \frac{\beta}{x} \text{ atau } y = \frac{\alpha x + \beta}{x}. \quad \dots(2)$$

3. PEMBAHASAN DAN HASIL

Pembahasan dari masalah di atas akan dilakukan secara iterasi, di mana pada iterasi pertama, diberikan sembarang nilai awal $r_1 = x$. Dengan mensubstitusikan nilai r_1 ke persamaan (1) atau nilai x ke persamaan (2), maka akan diperoleh nilai $r_2 = y$. Selanjutnya dengan cara memproyeksikan nilai $y = r_2$ ke sumbu x melalui garis $y = x$, akan diperoleh nilai yang kita sebut $r_2 = x$. Langkah selanjutnya, pada iterasi ke-2 dilakukan seperti pada iterasi pertama, di mana dengan mensubstitusikan r_2 ke persamaan (1) atau x ke persamaan (2) akan diperoleh $r_3 = y$ yang kemudian diproyeksikan ke garis $y = x$.

Demikian seterusnya sehingga r_1, r_2, r_3, \dots semua akan terletak di sumbu x dan bergerak menuju ke absis titik konvergensi pada kurva hiperbola (2).

Karena ada dua titik yang salah satunya mungkin jadi titik konvergensi, yaitu:

$$r^* = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2} \text{ atau } r^{**} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2},$$

maka dalam grafik akan terlihat perubahan-perubahan nilai r_n yang akan mendekati salah satu dari kedua titik di atas, tergantung pada α dan β .

Selanjutnya di bawah ini akan dibahas kasus demi kasus tergantung pada nilai α dan β . Setiap pembahasan akan dimulai secara analisis, kemudian dilanjutkan dengan pembahasan secara geometri.

3.1 Kasus Pertama: $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

Untuk kasus ini akan berlaku bahwa

$$\alpha < \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}$$

sehingga r^* akan bernilai positif, sedangkan r^{**} akan bernilai negatif.

Karena $r_n = \alpha + \frac{\beta}{r_{n-1}}$ untuk $n \geq 2$, maka: jika $r_1 > 0$

akan mengakibatkan $r_n > 0$ untuk semua n , sedangkan jika $r_1 < 0$ maka akan terdapat k sehingga $r_n > 0$ untuk semua $n > k$. Dengan demikian untuk kasus pertama ini, (r_n) akan konvergen ke suatu bilangan positif, dan ini tiada lain adalah r^* . Hal ini akan jelas terlihat dalam grafik bahwa

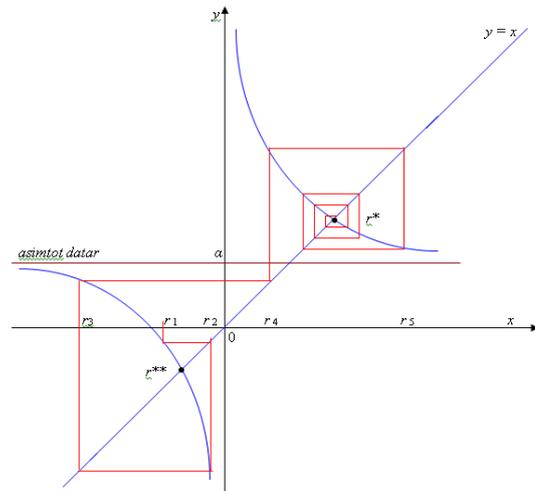
r_1, r_2, r_3, \dots dst akan konvergen ke r^* dengan penjelasan sebagai berikut.

Untuk kasus pertama, Hiperbola pada persamaan (2) memiliki:

Asimtot datar $y = \alpha > 0$,

Asimtot tegak $x = 0$, dan memiliki titik potong dengan sumbu- x di $x = \frac{-\beta}{\alpha} < 0$.

Selanjutnya dengan mengambil nilai awal r_1 berupa bilangan sembarang (dalam contoh ini bilangan negatif), maka diperoleh nilai r_1, r_2, r_3, \dots seperti tampak pada gambar 1 berikut:



Gambar 1. Grafik untuk $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$

Terlihat bahwa r_n bergerak menuju r^* yang artinya (r_n) konvergen ke r^* .

3.2 Kasus Kedua: $\alpha < 0$ dan $\beta > 0$

Dalam kasus kedua ini akan diperoleh r^* bernilai positif, dan r^{**} bernilai negatif.

Karena

$$r_n = \alpha + \frac{\beta}{r_{n-1}} \text{ untuk } n \geq 2, \text{ maka:}$$

nilai $r_1 < 0$ akan mengakibatkan $r_n < 0$ untuk semua n , sedangkan jika $r_1 > 0$ maka akan terdapat k sehingga $r_n < 0$ untuk semua $n > k$.

Berdasarkan sifat kekonvergenan barisan bahwa jika (r_n) konvergen dan $r_n < 0$ untuk semua n maka limit barisannya $\lim r_n < 0$ [1,3]. Dengan demikian untuk kasus kedua ini, (r_n) akan konvergen ke suatu bilangan negatif, dan ini tiada lain adalah r^{**} .

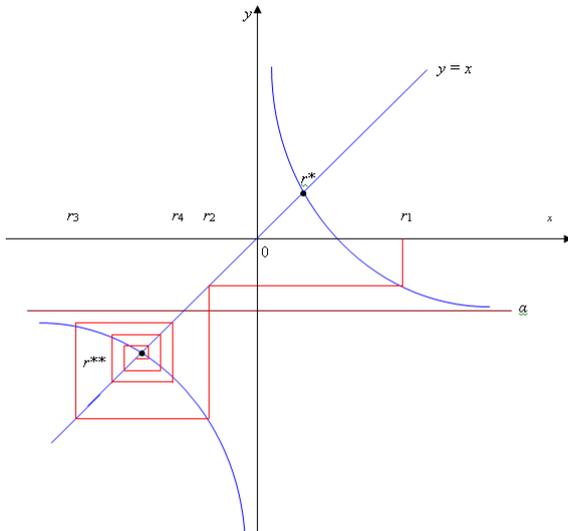
Secara grafik, Hiperbola pada persamaan (2) memiliki:

Asimtot datar $y = \alpha < 0$,

Asimtot tegak $x = 0$,

dan memiliki titik potong dengan sumbu- x terjadi di $x = \frac{-\beta}{\alpha} > 0$.

Selanjutnya dengan mengambil nilai awal r_1 berupa bilangan sembarang (dalam contoh ini bilangan positif), maka diperoleh nilai r_1, r_2, r_3, \dots seperti tampak pada Gambar 2 berikut:



Gambar 2. Grafik untuk $\alpha < 0$ $\beta > 0$

Terlihat bahwa r_n bergerak menuju $r^{**} < 0$ yang berarti bahwa (r_n) konvergen ke r^{**} .

3.3 Kasus Ketiga : $\alpha > 0$ dan $\beta < 0$

Dalam kasus ketiga ini akan diperoleh fakta bahwa

$$\alpha > \sqrt{\alpha^2 + 4\beta},$$

Sehingga nilai dari r^* dan r^{**} keduanya akan bernilai positif.

Karena

$$r_n = \alpha + \frac{\beta}{r_{n-1}} \text{ untuk } n \geq 2, \text{ maka:}$$

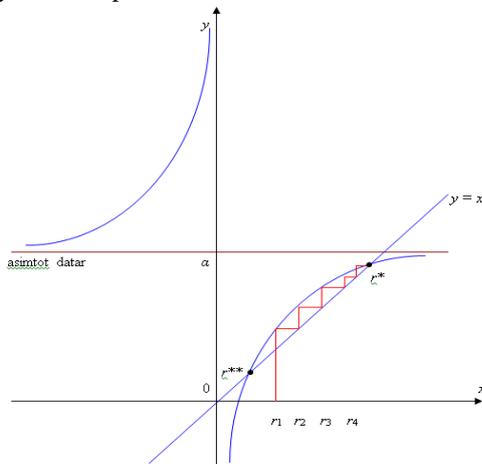
nilai $r_1 > 0$ akan mengakibatkan $r_n > 0$ untuk semua n , sedangkan jika $r_1 < 0$ maka akan terdapat k sehingga $r_n > 0$ untuk semua $n > k$. Dengan demikian untuk kasus ketiga ini, (r_n) akan konvergen ke suatu bilangan positif, dan ini tiada lain adalah r^* .

Grafik Hiperbola pada kasus ini, memiliki

Asimtot datar: $y = \alpha > 0$

Asimtot tegak: $x = 0$, dan titik potong dengan sumbu-x terjadi $x = \frac{-\beta}{\alpha} > 0$.

Grafiknya terlihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Grafik untuk $\alpha > 0$ dan $\beta < 0$

Terlihat bahwa r_n bergerak menuju r^* yang artinya (r_n) konvergen ke r^* .

3.4 Kasus Keempat: $\alpha < 0$ dan $\beta < 0$

Seperti pada kasus-kasus sebelumnya, dalam kasus keempat ini akan dapat ditentukan bahwa nilai r^* dan r^{**} keduanya bernilai negatif, dimana jika $r_1 < 0$ akan mengakibatkan $r_n < 0$ untuk semua n , sedangkan jika $r_1 > 0$ maka akan terdapat k sehingga $r_n < 0$ untuk semua $n > k$. Dengan demikian untuk kasus keempat ini ini, (r_n) akan konvergen ke suatu bilangan negatif, dan ini tiada lain adalah r^{**} .

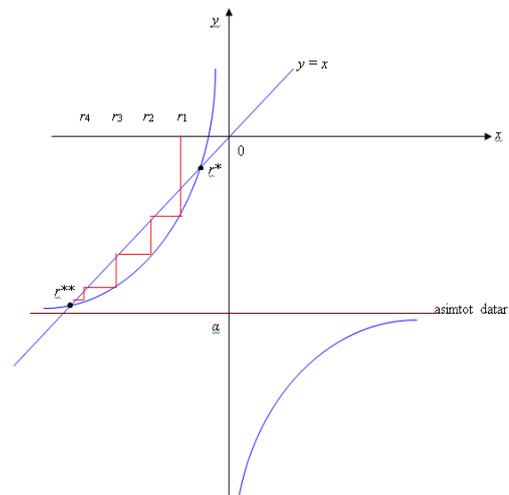
Hiperbola yang terjadi memiliki:

Asimtot datar: $y = \alpha < 0$,

Asimtot tegak: $x = 0$, dan

titik potong dengan sumbu-x terjadi di $x = \frac{-\beta}{\alpha} < 0$

Grafik terlihat seperti pada Gambar 4 di bawah ini.



Gambar- 4. Grafik untuk $\alpha < 0$ dan $\beta < 0$

Terlihat bahwa r_n bergerak menuju r^{**} yang artinya (r_n) konvergen ke r^{**} .

3. KESIMPULAN

Dari pembahasan melalui pendekatan geometris, dapat kita ketahui bahwa untuk kasus pertama dan kasus ketiga maka barisan rasio dari perluasan Fibonacci akan konvergen ke r^* , sedangkan untuk kasus kedua dan kasus keempat maka barisan rasio dari perluasan Fibonacci akan konvergen ke r^{**} . Disini terlihat bahwa titik konvergensi tidak tergantung pada suku awal yang diberikan tetapi hanya tergantung pada α dan β saja. Demikian juga, dari grafik terlihat bahwa yang menjadi titik konvergensi adalah titik pada kurva yang kemiringannya lebih landai atau gradien garis singgungnya lebih kecil.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Adalberto García-Máynez and Adolfo Acosta, Pimienta A Method to Construct Generalized Fibonacci Sequences, *Journal of Applied Mathematics*, Volume 2016 (2016), Article ID 4971594, 6 pages.
- [2] Atkins, J., Geist, R., Fibonacci numbers and computer algorithms, *College Math. J.*, 18, 1987, 328–337.
- [3] Bartle, R.G & Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, second ed, John Wiley & sons, Inc. 1992.
- [4] Endang Rusyaman, Konvergensi Barisan Rasio dari Barisan Fibonacci yang diperumum, *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, Unpad Bandung, 2006.
- [5] Johan Matheus Tuwankotta, Two Aspects Of A Generalized Fibonacci Sequence, DOI : [10.22342/jims.21.1.173.1-17](https://doi.org/10.22342/jims.21.1.173.1-17)
- [6] J. B. Bacani and J. F. T. Rabago, Generalized Fibonacci Numbers, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. x, 2015. 1-12
- [7] Kalman & Menna Robert, The Fibonacci Numbers Exposed, *Mat Magazine*, 2003, (3:167-181)
- [8] Yayenie, O., Edson, M., A New Generalization of Fibonacci Sequence and Extended Binets Formula, *Integers*, 2009, (# A48) (2009), pp. 639–654