

PENERAPAN DERET TAYLOR DALAM MENENTUKAN DERET FOURIER TANPA INTEGRAL

APPLYING TAYLOR SERIES IN DETERMINING FOURIER SERIES WITHOUT INTEGRAL

Hedi

(Staf Pengajar UP MKU Politeknik Negeri Bandung)

Abstrak

Penelitian ini merupakan lanjutan dari penelitian yang berjudul *Menentukan Deret Fourier Fungsi Periode Sembarang Tanpa Integral*. Masalahnya, fungsi yang ditentukan deret Fouriernya harus berbentuk polinom. Selanjutnya, dalam penelitian ini fungsi yang bukan polinom dapat diubah ke bentuk polinom dengan cara menerapkan deret Taylor sehingga deret Fourier dapat ditentukan tanpa melalui integral.

Kata kunci : Deret Fourier, Polinom, Deret Taylor

Abstract

This Research is continuation from research that entitle determine Fourier series an arbitrary periodic function without integral. This method is of no use at all when we cannot find the function in the form of polynomial function. Its function is not restricted to polynomial by applying the Taylor series, Fourier series can be determined without integral

Keywords: *Fourier series, Taylor series Without Integral*

PENDAHULUAN

Deret Fourier diterapkan dalam rekayasa (Hedi, 2007) sebagai contoh dalam ilmu listrik,

yaitu menganalisis *steady state respons* rangkaian terhadap *input* yang berbentuk fungsi bukan sinus atau cosines, tetapi bersifat periodik.

Umumnya, jika koefisien Fourier tidak dapat ditentukan secara eksak, dilakukan dengan pendekatan numerik (Washington, 1987). Bahasa pemrograman - seperti Derive, Maple, Matlab - memiliki kemampuan untuk menentukan koefisien Fourier melalui pendekatan numerik. Tentunya, jika piranti keras tidak memadai, pendekatan terbaik akan sulit didapatkan.

Apabila $f(x)$ yang didefinisikan pada interval $(-L, L)$,

- bagian demi bagian pada interval tersebut berkesinambungan;
- pada interval tersebut integrabel;
- berperiodik dengan Periode $2L$.

$f(x)$ dapat dinyatakan dalam deret Fourier sebagai berikut:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) \dots \dots \dots (1)$$

kemudian a_0 , a_n , dan b_n yang ditentukan dengan menerapkan rumus Euler sebagai

berikut:

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx \dots \dots \dots (2)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \dots \dots \dots (3)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \dots \dots \dots (4)$$

Apabila $f(x)$ fungsi sederhana, seperti fungsi dari gelombang persegi, gigi gergaji atau fungsi polinom, persamaan 2, 3, dan 4 tidak sulit ditentukan. Dalam praktik, apabila $f(x)$ berbentuk seperti e^{x^2} , persamaan 2, 3, dan 4 tidak dapat dicari secara eksak

Penelitian ini bertujuan untuk mengubah persamaan 2 dan 3 menjadi bentuk penjumlahan fungsi yang dapat diterapkan untuk sembarang fungsi. Selanjutnya, diterapkan deret Fourier pada masalah rangkaian listrik yang terdiri atas Resistor (R), Induktor (L), dan kapasitor C dihubungkan seri dengan sumber tegangan $E(t)$ yang bukan sinus atau cosines, tetapi berperiodik

TINJAUAN PUSTAKA

1. Menentukan Koefisien Fourier Tanpa Integral (Matheus, 1999)

$f(x)$ adalah fungsi yang mempunyai periode $2L$ yang berbentuk polinom-polinom $g_1, g_2, g_3 \dots g_n$ di dalam interval $-L < x < L$

$$\left\{ \begin{array}{ll} g_1(x) & \text{bila } -L = x_0 < x < x_1, (x_0 = -L) \\ g_2(x) & \text{bila } x_1 < x < x_2 \\ g_3(x) & \text{bila } x_2 < x < x_3 \\ & \vdots \\ g_m(x) & \text{bila } x_{m-1} < x < x_m = L, (x_m = L) \end{array} \right. \quad ..(5)$$

maka $f(x)$ mungkin mempunyai loncatan di $x_0, x_1, x_2, \dots x_m$.

Begitu pula dengan turunan-turunannya $f', f'', f''', \dots$

Selanjutnya, dinotasikan $f_j =$

loncatan f di x_j

$$f_j = f(x_j+) - f(x_j-)$$

$$f_j' = \text{loncatan } f' \text{ di } x_j,$$

$$f_j' = f'(x_j+) - f'(x_j-)$$

$$f_j'' = \text{loncatan } f'' \text{ di } x_j$$

$$f_j'' = f''(x_j+) - f''(x_j-)$$

dan seterusnya, $j = 1, 2, 3, \dots m$.

a_n dan b_n ditentukan dengan penjumlahan sebagai berikut:

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \left(- \sum_{j=1}^m f_j \sin \frac{n\pi}{L} x_j - \frac{L}{n\pi} \sum_{j=1}^m f_j' \cos \frac{n\pi}{L} x_j + \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \sum_{j=1}^m f_j'' \sin \frac{n\pi}{L} x_j + \left(\frac{L}{n\pi} \right)^3 \sum_{j=1}^m f_j''' \cos \frac{n\pi}{L} x_j - \dots + \dots \right) ..(6)$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \left(\sum_{j=1}^m f_j \cos \frac{n\pi}{L} x_j - \frac{L}{n\pi} \sum_{j=1}^m f_j' \sin \frac{n\pi}{L} x_j - \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \sum_{j=1}^m f_j'' \cos \frac{n\pi}{L} x_j + \left(\frac{L}{n\pi} \right)^3 \sum_{j=1}^m f_j''' \sin \frac{n\pi}{L} x_j - \dots + \dots \right) ..(7)$$

2. Pengintegralan Numerik (Chapra, 2002)

Jika persamaan 2, 3, dan 4 tidak dapat ditentukan secara eksak, umumnya dilakukan melalui

pendekatan numerik dengan cara mengaproksimasi integralnya dengan aturan simpson 1/3 yaitu:

$\int_a^b f(x)dx$ didekati dengan cara

membagi selang $[a, b]$ menjadi n buah selang yang sama yaitu $h = \frac{b-a}{n}$ sehingga didapat titik-titik

$x_0 = a, x_1, x_2, x_3 \dots x_n = b$. Integral tersebut didekati dengan

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)) \quad (8)$$

3. Deret Taylor (Chapra, 2002)

Apabila fungsi $f(x)$ dan turunan-turunannya ada dalam suatu selang $(c-r, c+r)$, $f(x)$, dapat dituliskan ke dalam bentuk

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \dots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-c)^n \dots \dots \dots (9)$$

Deret ini dinamakan deret Taylor.

dengan $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-c)^n$

dan a suatu bilangan dalam selang $(c-r, c+r)$

Jika $\lim_{x \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, deret tersebut

menggambarkan $f(x)$ pada selang tersebut.

4. Aproksimasi Fungsi (Chapra, 2002)

Aproksimasi fungsi adalah mendekati suatu fungsi dengan menggunakan fungsi yang lain. Fungsi tersebut biasanya ditentukan dengan menerapkan deret Taylor jika fungsi yang diaproksimasi berperiodik ditentukan dengan menerapkan Deret Fourier.

Galat merupakan selisih yang dihasilkan oleh fungsi yang diaproksimasi dengan fungsi yang mengaproksimasi. Dengan demikian, aproksimasi terbaik adalah aproksimasi yang menghasilkan grafik yang mirip dengan fungsi yang diaproksimasi.

Jika kita mengaproksimasi fungsi $f(x)$ oleh $p(x)$ pada titik x_n dalam interval $a < x < b$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots$, galat absolut di x_n adalah

$$G = |f(x_n) - p(x_n)| \dots\dots\dots(10)$$

Ini dinamakan defiasi antara f dan p di x_n dan galat persentasinya adalah

$$GP = \frac{|f(x_n) - p(x_n)|}{|f(x_n)|} 100\% \dots\dots(11)$$

dengan $f(x_n) \neq 0$

METODE PENELITIAN

Persaman 6 dan 7 tidak dapat ditentukan apabila fungsi $y = f(x)$ bukan fungsi polinom. Selanjutnya, fungsi tersebut akan didekati dengan polinom Taylor. Masalahnya adalah menentukan derajat yang sesuai pada selang $a < x < b$. Untuk itu, digunakan pendekatan secara grafis untuk mendapatkan fungsi yang sesuai dengan polinom Taylor, yaitu dengan menggunakan program Maple (versi 9.5). Selanjutnya, dibandingkan nilai-nilai fungsi polinom pada selang tersebut dengan nilai fungsi sebenarnya. Dengan demikian, kesalahan dalam pendekatan polinom terhadap fungsi yang sebenarnya dapat ditentukan.

Jika fungsi polinom pada selang $a < x < b$ tidak ada yang memenuhi, dilakukan pemotongan menjadi dua atau lebih dari selang tersebut yang dilanjutkan dengan menentukan polinom Taylor yang sesuai pada selang bagiannya.

Tahap berikutnya adalah membandingkan nilai fungsi yang terpilih dengan nilai fungsi yang sebenarnya. Apabila rata-rata galat persen kecil, pemilihan fungsi polinom yang sesuai sudah tepat. Jika tidak, dilakukan kembali pada titik yang lain atau menaikkan derajat polinomnya. Selanjutnya, ditentukan deret Fourier fungsi periodik yang fungsinya telah dinyatakan dengan polinom Taylor, yaitu dengan menerapkan persamaan 6 atau 7. Sebagai pembanding, ditentukan dengan metode numerik yang integralnya ditentukan dengan persamaan 8. Tahap berikutnya adalah membandingkan deret Fourier dari dua metode ini dengan fungsi yang sebenarnya.

Pada masalah rangkaian listrik dari rangkaian seri resistor, induktor, dan kapasitor, diterapkan

deret Fourier. Sumber tegangan berbentuk fungsi periodik yang koefisien Fourier-nya tidak bisa ditentukan dengan persamaan 6 dan 7.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Perhatikan fungsi $f(x)$ berperiodik dengan periode $2L = 6$

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{jika } 0 < x < 3 \\ -\ln(-x+1) & \text{jika } -3 < x < 0 \end{cases} \quad \dots(6)$$

Untuk $0 < x < 3$, $f(x) = \ln(x+1)$ dengan menerapkan persamaan 9, deret Taylornya adalah
di $x = 1$

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-1) - \\ &\frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3 - \frac{1}{64}(x-1)^4 \\ &+ \dots \quad \dots(12) \end{aligned}$$

dan di $x = 2$

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= \ln 3 + \frac{1}{3}(x-2) - \\ &\frac{1}{18}(x-2)^2 + \frac{1}{81}(x-2)^3 - \\ &\frac{1}{324}(x-2)^4 + \dots \quad \dots(13) \end{aligned}$$

Karena $f(x)$ fungsi ganjil, deret Taylor untuk $-3 < x < 0$ adalah

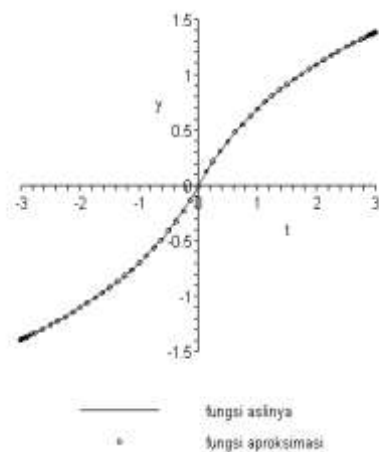
di $x = -1$

$$\begin{aligned} -\ln(-x+1) &= -\ln 2 \\ &+ \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{8}(x+1)^2 + \frac{1}{24}(x+1)^3 \\ &+ \frac{1}{64}(x+1)^4 + \dots \quad \dots(14) \end{aligned}$$

dan di $x = -2$

$$\begin{aligned} -\ln(-x+1) &= -\ln 3 \\ &+ \frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{18}(x+2)^2 + \frac{1}{81}(x+2)^3 \\ &+ \frac{1}{324}(x+2)^4 + \dots \\ &\dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

Dengan menggunakan program Maple (versi 9.5), sketsa grafik untuk polinom derajat 4 dan fungsi aslinya adalah



Gambar 1

Nilai-nilai polinom Taylor dan
fungsi yang sebenarnya
diperlihatkan dalam tabel 1

Tabel 1

x	ln(x+1)	Polinom Taylor		Galat	
		X=1	X=2	x = 1	x=2
0.1	0.09531	0.10127	0.13982	6.25%	46.70%
0.2	0.182322	0.18541	0.21421	1.70%	17.49%
0.3	0.262364	0.26385	0.28496	0.57%	8.61%
0.4	0.336472	0.33712	0.35226	0.19%	4.69%
0.5	0.405465	0.40571	0.41632	0.06%	2.68%
0.6	0.470004	0.47008	0.47732	0.02%	1.56%
0.7	0.530628	0.53065	0.53545	0.00%	0.91%
0.8	0.587787	0.58779	0.59088	0.00%	0.53%
0.9	0.641854	0.64185	0.64377	0.00%	0.30%
1	0.693147	0.69315	0.69429	0.00%	0.17%
1.1	0.741937	0.74194	0.74259	0.00%	0.09%
1.2	0.788457	0.78846	0.78881	0.00%	0.04%
1.3	0.832909	0.8329	0.83308	0.00%	0.02%
1.4	0.875469	0.87541	0.87555	0.01%	0.01%
1.5	0.916291	0.91613	0.91632	0.02%	0.00%
1.6	0.955511	0.95512	0.95552	0.04%	0.00%
1.7	0.993252	0.99244	0.99325	0.08%	0.00%
1.8	1.029619	1.02808	1.02962	0.15%	0.00%
1.9	1.064711	1.06202	1.06471	0.25%	0.00%
2	1.098612	1.09419	1.09861	0.40%	0.00%
2.1	1.131402	1.12448	1.1314	0.61%	0.00%
2.2	1.163151	1.15275	1.16315	0.89%	0.00%
2.3	1.193922	1.17881	1.19392	1.27%	0.00%
2.4	1.223775	1.20246	1.22377	1.74%	0.00%
2.5	1.252763	1.22342	1.25274	2.34%	0.00%
2.6	1.280934	1.24141	1.28088	3.09%	0.00%
2.7	1.308333	1.2561	1.30822	3.99%	0.01%
2.8	1.335001	1.26712	1.33478	5.08%	0.02%
2.9	1.360977	1.27406	1.36059	6.39%	0.03%
3	1.386294	1.27648	1.38565	7.92%	0.05%

Polinom Taylor di x =1 memiliki
pendekatan cukup baik pada
interval $0 < x < 1,5$, sedangkan di x
= 2 pada interval $1,5 < x < 3$.

Dengan demikian, dipilih yang
mewakili $\ln(x + 1)$ pada interval $0 <$
 $x < 3$, yaitu

$$y = \ln 2 + \frac{1}{2} (x-1) -$$

$$\frac{1}{8} (x-1)^2 + \frac{1}{24} (x-1)^3 - \frac{1}{64} (x-1)^4$$

.....(16)

dengan $0 < x < 1,5$

dan

$$y = 2 \ln 2 + \frac{1}{4} (x-3) -$$

$$\frac{1}{32} (x-3)^2 + \frac{1}{192} (x-3)^3 -$$

$$\frac{1}{1024} (x-3)^4 \dots\dots\dots(17)$$

dengan $1,5 < x < 3$.

Untuk $-\ln(-x+1)$ pada $-3 < x < 0$
adalah

$$y = -\ln 2$$

$$+ \frac{1}{2} (x+1) + \frac{1}{8} (x+1)^2 + \frac{1}{24} (x+1)^3$$

$$+ \frac{1}{64} (x+1)^4 + \dots \dots\dots(18)$$

dengan $-1,5 < x < 0$

dan

$$y = -\ln 3$$

$$+ \frac{1}{3}(x+2) + \frac{1}{18}(x+2)^2 + \frac{1}{81}(x+2)^3 \\ + \frac{1}{324}(x+2)^4 + \dots$$

.....(19)

dengan $-3 < x < 1,5$

Karena $f(x)$ fungsi ganjil, deret Fourier-nya berbentuk sinus sehingga koefisien Fourier-nya ditentukan oleh persamaan 6, yaitu $f(x) = 1,1196\sin(\frac{1}{3}\pi x) -$

$$0,4020\sin(\frac{2}{3}\pi x)$$

$$+0,3115\sin(\pi x) - 0,2133\sin(\frac{4}{3}\pi x)$$

$$+0,1813\sin(\frac{5}{3}\pi x) - 0,1442\sin(2\pi x)$$

$$+0,1283\sin(\frac{7}{3}\pi x) - 0,1087\sin(\frac{8}{3}\pi x)$$

$$+0,0994\sin(3\pi x) - 0,08717\sin(\frac{10}{3}\pi x) \\ x)$$

$$+0,0812\sin(\frac{11}{3}\pi x) - 0,0727\sin(4\pi x)$$

$$+0,0686\sin(\frac{13}{3}\pi x) - 0,0624\sin(\frac{14}{3}\pi x)$$

$$+0,0594\sin(5\pi x) - 0,0546\sin(\frac{16}{3}\pi x)$$

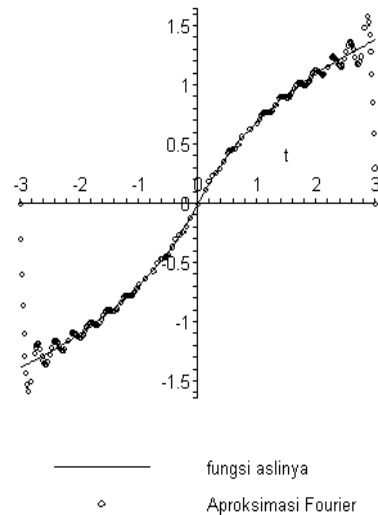
$$+0,0524\sin(\frac{17}{3}\pi x) - 0,0486\sin(6\pi x)$$

$$+0,0469\sin(\frac{19}{3}\pi x) -$$

$$0,0437\sin(\frac{20}{3}\pi x) + \dots$$

.....(20)

Dengan menggunakan program Maple (versi 9.5), sketsa grafik deret Fourier dua puluh suku yang pertama adalah



Selanjutnya, persamaan 6 diselesaikan dengan pendekatan numerik dengan menerapkan persamaan 8 dan bantuan program Maple (versi 9.5) dengan iterasi 80 didapat

$$f(x) = 1,1195\sin(\frac{1}{3}\pi x) -$$

$$0,4024\sin(\frac{2}{3}\pi x) + 0,3111\sin(\pi x) -$$

$$0,2139\sin(\frac{4}{3}\pi x) + 0,1808\sin(\frac{5}{3}\pi x) -$$

$$0,1449\sin(2\pi x) + 0,1277\sin(\frac{7}{3}\pi x) -$$

$$0,1093\sin(\frac{8}{3}\pi x) + 0,0989\sin(3\pi x) -$$

$$0,0877\sin(\frac{10}{3}\pi x) + 0,0807\sin(\frac{11}{3}\pi$$

$$x) - 0,0733\sin(4\pi x) + 0,0682\sin(\frac{13}{3}\pi$$

$$\begin{aligned} & x) - 0,0629 \sin\left(\frac{14}{3} \pi x\right) + 0,0591 \sin(5\pi x) \\ & - 0,0551 \sin\left(\frac{16}{3} \pi x\right) \\ & + 0,0521 \sin\left(\frac{17}{3} \pi x\right) - 0,0490 \sin(6\pi x) \\ & + 0,0466 \sin\left(\frac{19}{3} \pi x\right) - \\ & 0,0442 \sin\left(\frac{20}{3} \pi x\right) + \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

2.3	1.194	1.23799	1.23773	3.69%	3.67%
2.4	1.224	1.156536	1.15665	5.49%	5.48%
2.5	1.253	1.28096	1.28109	2.25%	2.26%
2.6	1.281	1.340538	1.34011	4.65%	4.62%
2.7	1.308	1.174495	1.17467	10.23%	10.22%
2.8	1.335	1.447846	1.44788	8.45%	8.46%
2.9	1.361	1.446917	1.44585	6.31%	6.24%
3	1.386	-6.96E-09	-6.96E-09	100.00%	100.00%
Simpangan Rata-rata				7.38%	7.19%

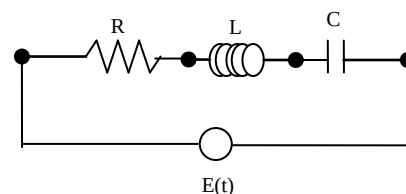
Nilai-nilai fungsi Fourier dari dua metode dan fungsi yang sebenarnya diperlihatkan dalam tabel 2.

Tabel 2

x	ln(x+1)	Metode		Galat	
		Numerik	Taylor	numerik	polinom
0.1	0.095	0.077139	0.08384	19.07%	12.03%
0.2	0.182	0.202363	0.20621	10.99%	13.10%
0.3	0.262	0.258681	0.25919	1.40%	1.21%
0.4	0.336	0.320224	0.32137	4.83%	4.49%
0.5	0.405	0.427129	0.42751	5.34%	5.44%
0.6	0.47	0.462724	0.46233	1.55%	1.63%
0.7	0.531	0.516317	0.51671	2.70%	2.62%
0.8	0.588	0.611309	0.6113	4.00%	4.00%
0.9	0.642	0.630534	0.63025	1.76%	1.81%
1	0.693	0.681052	0.68136	1.75%	1.70%
1.1	0.742	0.76759	0.7675	3.46%	3.45%
1.2	0.788	0.772371	0.7722	2.04%	2.06%
1.3	0.833	0.823522	0.82377	1.13%	1.10%
1.4	0.875	0.903694	0.9035	3.22%	3.20%
1.5	0.916	0.894194	0.89404	2.41%	2.43%
1.6	0.956	0.949702	0.94995	0.61%	0.58%
1.7	0.993	1.024815	1.02466	3.18%	3.16%
1.8	1.03	0.999262	0.99922	2.95%	2.95%
1.9	1.065	1.064138	1.06435	0.05%	0.03%
2	1.099	1.134932	1.13473	3.31%	3.29%
2.1	1.131	1.088235	1.08827	3.82%	3.81%
2.2	1.163	1.171503	1.17168	0.72%	0.73%

Penerapan Deret Fourier pada Rangkaian Listrik

Perhatikan rangkaian listrik yang terdiri atas resistor (R), induktor (L), dan kapasitor C dihubungkan seri dengan sumber tegangan E(t) Gambar



Dengan menerapkan hukum Kirchoff untuk tegangan, diberikan persamaan diferensial

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{Lc} I(t) = \\ & \frac{1}{L} \frac{d(E(t))}{dt} \\ & \dots \dots \dots (22) \end{aligned}$$

Apabila diketahui $R = 100 \, \Omega$, $L = 10 \text{ Henry}$, $C = 10^{-2} \text{ farad}$, persamaan 22 menjadi

$$\frac{d^2 I(t)}{dt} + 0,1 \frac{dI(t)}{dt} + I(t) = \frac{1}{100} \frac{d(E(t))}{dt} \dots\dots\dots(24)$$

dan apabila *input* tegangan E(t) berbentuk

E(t) =

$$\begin{cases} 100(t+1)\ln(t+1)+100t & \text{jika } 0 < t < 3 \\ 100(t-1)\ln(-t+1)+100t & \text{jika } -3 < t < 0 \end{cases} \dots\dots\dots(25)$$

Berperiodik dengan periode 2L = 6

$$\frac{1}{100} \frac{d(E(t))}{dt} = \begin{cases} \ln(t+1) & \text{jika } 0 < t < 3 \\ -\ln(-t+1) & \text{jika } -3 < t < 0 \end{cases} \dots\dots\dots(26)$$

Dari persamaan 20, deret Fourier-nya adalah

$$\begin{aligned} \frac{1}{100} \frac{d(E(t))}{dt} &= 1,1196 \sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) - \\ &0,4020 \sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right) + 0,3115 \sin(\pi x) - \\ &0,2133 \sin\left(\frac{4}{3}\pi x\right) + 0,1813 \sin\left(\frac{5}{3}\pi x\right) - \\ &0,1442 \sin(2\pi x) + \dots \end{aligned} \dots\dots\dots(27)$$

Jika ruas kanan persamaan 24 adalah salah satu deret berbentuk

$$\frac{d^2 I(t)}{dt} + 0,1 \frac{dI(t)}{dt} + I(t) = k \sin \frac{n\pi}{3} t \dots\dots\dots(28)$$

dengan $n = 1, 2, 3, \dots$,

solusi keadaan stabil I(t) berbentuk

$$I_n(t) = A \cos \frac{n\pi}{3} t + B \sin \frac{n\pi}{3} t$$

Dengan menyubstitusikan ke persamaan 28, didapat

$$A = \frac{270\pi nk}{100(\pi^2 n^2 - 9)^2 + 9\pi^2 n^2}$$

$$\text{dan } B = \frac{900k(\pi^2 n^2 - 9)}{100(\pi^2 n^2 - 9)^2 + 9\pi^2 n^2}$$

Solusi keadaan stabilnya adalah

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$$

Amplitudo solusi $I_n(t)$ adalah

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Misalkan, ruas kanan persamaan 28 adalah suku kesatu dari deret Fourier persamaan 27

$$1,1196 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot t\right) = k \sin \frac{n\pi}{3} t$$

maka

$$k = 1,1196 \text{ dan } n = 1$$

Jadi

$$A = 5,4024 \text{ dan } B = 4,9847$$

$$\text{Dan } C = 7,3508$$

SIMPULAN

Apabila $f(x)$ fungsi logaritma yang terdefinisi pada interval $a < x < b$ berperiodik dengan periode $2L$, koefisien Fourier ditentukan terlebih dahulu dengan memotong interval tersebut agar didapat polinom yang sesuai. Akibatnya, fungsi menjadi tidak kontinu di titik pemotongan. Dengan kata lain, ada loncatan nilai fungsi di titik tersebut. Karena besar loncatan kecil, tidak berpengaruh pada deret Fourier. Secara grafis, fungsinya melilit di sekitar fungsi aslinya. Sebagai pembanding, dengan metode numeric, ternyata hasilnya tidak jauh berbeda dengan pendekatan numerik. Dengan demikian, pendekatan polinom Taylor dapat diterapkan untuk menentukan deret Fourier sembarang fungsi tanpa integral.

Polinom Taylor yang sesuai dengan fungsi pada interval $a < x < b$ tidak hanya secara grafis saja, tetapi harus dinyatakan nilai-nilainya. Apakah sesuai dengan yang sebenarnya. Hal ini mengingat grafik yang dibuat oleh pemrograman komputer bisa saja menampakkan sama antara

polinom Taylor dengan fungsi sebenarnya walaupun sebenarnya berbeda.

Bahasa pemrograman seperti Maple 9.5 dan Derive sangat membantu dalam mengubah fungsi ke dalam bentuk polinom Taylor. Dilanjutkan dengan memilih polinom yang sesuai dengan fungsi tersebut. Di samping itu, adanya *software* sangat membantu dalam melakukan operasi-operasi aljabar yang secara hitungan manual amat rumit dilakukan.

DAFTAR PUSTAKA

- Chapra, Steven C. 2002. *Numerical Methods for Engineers: with Software and Programming Application*, Ed ke-4. New York: The McGraw-Hill Companies, INC.
- Erwin, Kreyszig. 1993. *Advanced Engineering Mathematics*, Ed ke- 7. New York: John Wiley & Sons, INC.
- Hedi. 2007. "Menentukan Deret Fourier Fungsi dengan Periode Sembarang Tanpa Integral", *Sigma-MU* (Jurnal Penelitian & Gagasan Sains dan Matematika Terapan), Vol 1, No 1, Maret.
- Matheus, John H dan Kurtis D. Fink. 1999. *Numerical Methods*

Using Matlab, Third Edition,
Prentice Hall (INC).

Purcell, Edwin J. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analisis*, Ed. ke-5, Jilid 2. Alih Bahasa I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga.

Washington, Allyn J. 1985. *Basic Technical Mathematics with Calculus*, Ed. ke-4. California: The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.