PENGGUNAAN HARGA BATAS KONTINU PADA DISKRITISASI NUMERIK DARI METODE PERBEDAAN TERHINGGA

USING CONTINUM BOUNDARY VALUE TO NUMERICAL DISKRETIZATION FROM FINITE ELEMENT METHODS

Neneng Nuryati
(Staf Pengajar UP MKU Politeknik Negeri Bandung)

ABSTRAK

Tujuan penelitian ini adalah memberikan suatu penyelesaian pada suatu masalah yang mempunyai harga batas kontinu. Metode elemen hingga merupakan suatu cara untuk menyusun jawaban atas pendekatan pada persolan harga batas. Metode ini menyangkut pembagian *domain* ke dalam sejumlah berhingga subdomain sederhana yang dinamakan elemen hingga. Dari beberapa macam diskritisasi yang dimungkinkan, salah satu metode sederhana adalah metode perbedaan terhingga. Proses perbedaan terhinggga dilakukan dengan mengasumsikan bermacam-macam pendekatan fungsi percobaan. Dalam penyelesaiannya, metode perbedaan terhingga menggunakan deret Taylor sebagai fungsi pendekatan. Harga batas kontinu biasanya terdapat dalam masalah- masalah fisika, khususnya pada masalah aliran panas dan aliran air.

Kata kunci : harga batas kontinu, diskritisasi numerik, metode perbedaan terhingga.

ABSTRACT

The aim of this research is to given solving problem that have continum boundary value. Finite Element Methods is a methods for constructing the approach solution on the boundary value problem. The Method is connected to domain division to a number of simple subdomain for the finite part, that is called finite elemen. There are some possible kinds of discretization, one of them which is simple is finite difference process. The finite difference process is performed with assuming a various of trial approach function. In the solving, the finite difference method uses the Taylor series as approach function. The continue boundary value is usually found in the physics especially in heat flow and fluid flow problems.

Keywords: *continum boundary value, discretization numeric, finite element methods*

PENDAHULUAN

Metode elemen hingga merupakan suatu cara untuk menyusun jawaban atas pendekatan pada persolan harga batas. Metode ini menyangkut pembagian *domain* ke dalam sejumlah berhingga subdomain sederhana yang dinamakan elemen hingga. Di samping menyelidiki beberapa masalah tentang gejala alam, ahli ilmu alam menetapkan bentuk umum persamaan diferensial biasa juga persamaan diferensial parsial yang berlaku dalam suatu *domain* tertentu. Bentuk ini dilengkapi syarat batas dan kondisi awal. Dalam hal ini, bentuk matematikanya lengkap serta untuk aplikasi praktisnya hanya digunakan penyelesaian data numerik tertentu. Persamaan diferensial biasa dengan koefisien konstan merupakan salah satu contoh untuk jawaban standar

Untuk mengatasi beberapa kesukaraan dalam penyelesaiannya, pada abad sekarang berkembang alat bantu komputer. Untuk penyelesaian secara aljabar, dipergunakan operasi dasar aritmetika dan untuk penyelesaian beberapa masalah yang kontinu, dapat digunakan bentuk persamaan diferensial. Dalam suatu diskritisasi, sekumpulan terhingga dari bilangan-bilangan menyatakan fungsi yang tak diketahui. Dari proses ini, diharapkan akan diperoleh penyelesaian hampiran.

Beberapa Contoh Masalah Kontinu

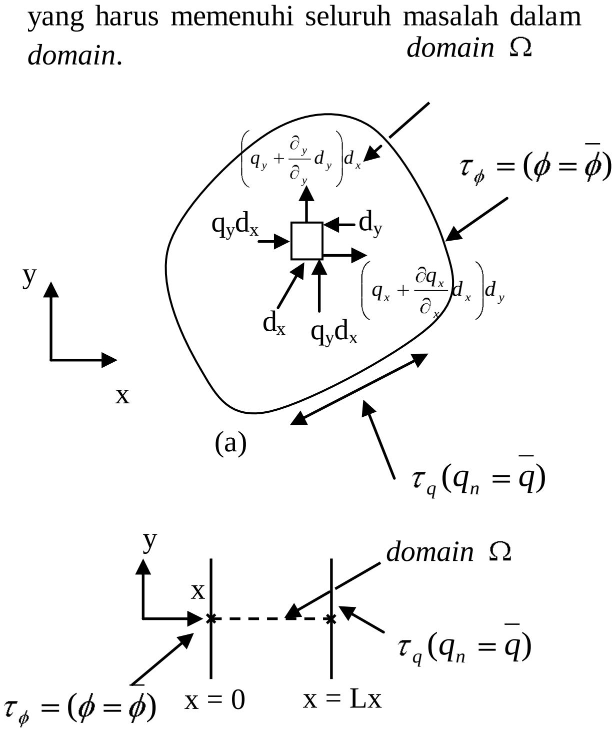
Pada masalah aliran panas dua dimensi, dinyatakan suatu *domain* dengan simbol Ω. Jika aliran panas pada arah sumbu x dan sumbu y persatuan panjang dan satuan waktu dinyatakan berturut-turut dengan q_x dan q_y, perbedaan dengan simbol D yaitu antara aliran yang masuk dan aliran yang keluar untuk ukuran dx dy, diberikan dengan persamaan sebagai berikut:

$$D = dy\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx - q_x\right) + dx\left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}dy - q_y\right) \ldots(1)$$

Besaran ini harus sama dengan jumlah panas yang timbul pada elemen dalam unit waktu. Misalkan, Q dx dy dengan Q bergantung pada posisi dan waktu. Dengan demikian, perubahan dinyatakan dengan $-\rho c\left(\frac{\partial \emptyset}{\partial t}\right)dx\,dy$ dengan c adalah panas yang spesifik, ρ adalah berat jenis, dan $\emptyset(x,y,t)$ adalah distribusi suhu. Persamaan difererensialnya adalah

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - Q + \rho c\frac{\partial \emptyset}{\partial t} = 0 \ \ldots(2)$$

yang harus memenuhi seluruh masalah dalam *domain*.



Gambar 1 Contoh masalah kontinu. (a) Konduksi panas dua dimensi (b) Konduksi panas satu dimensi.

Hukum fisika mengenai aliran panas dalam medium isotrofik, untuk komponen alir dalam arah n, dapat ditulis sebagai berikut :

$$q_n = -k\frac{\partial \emptyset}{\partial x} \qquad \ldots(3)$$

Masalah Harga Batas Kontinu dan Penggunaannya pada Diskritisasi Numerik dari Metode Perbedaan Terhingga

Dengan k adalah sifat medium yang diketahui sebagai daya konduksi. Suatu aliran panas untuk bahan isotrofik, khususnya dalam arah x dan y, dapat ditulis

$$q_x = -k\frac{\partial \emptyset}{\partial x}$$
$$q_y = -k\frac{\partial \emptyset}{\partial y} \quad \ldots(4)$$

Persamaan (2) dan (4) menyatakan hubungan suatu sistem persamaan diferensial pada masalah tersebut. Dalam hal ini, yang akan dicari adalah q_x, q_y dan $\emptyset$. Pada penyelesaian ini, digunakan syarat awal yang dinyatakan dengan $t = t_0$ dan syarat batas permukaan $\acute{\Gamma}\emptyset$ dengan harga dari temperatur yang ditetapkan sebagai $\overline{\emptyset}(x, y, t)$. Dengan demikian, diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\emptyset - \overline{\emptyset} = 0 \text{ dalam } \acute{\Gamma}\emptyset \quad \ldots(5)$$

Syarat batas dari bentuk persamaan (5) seperti ini sering kali dikatakan **syarat batas Dirichlet.** Dalam kondisi kedua, digunakan $\acute{\Gamma}_q$ dari batas. Harga aliran keluar dari panas dalam arah n yang tegak lurus terhadap batas yang dinyatakan dengan

$$q_n - \bar{q} = 0 \text{ dalam } \acute{\Gamma}_q \quad \ldots(6a)$$

atau $-k\frac{\partial \emptyset}{\partial n} - \bar{q} = 0$ dalam $\acute{\Gamma}_q$ … (6b)

Macam kondisi batas ini sering dikatakan sebagai **syarat batas Neumann**.

Masalahnya, dinyatakan dalam (2), (4), (5), dan (6) yang mewakili bilangan dari distribusi $\emptyset$, q_x, dan q_y pada semua waktu. Pada pokoknya, dapat diperoleh penyelesaian dari kumpulan persamaan ini. Masalah ini dapat dinyatakan dalam salah satu bentuk dengan menggunakan persamaan (4) yang dieliminasi dengan q_x dan q_y dari persamaan (2). Sekarang akan diperoleh persamaan diferensial tingkat tinggi dalam satu variabel bebas. Dari eliminasi ini, akan dihasilkan persamaan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \emptyset}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \emptyset}{\partial y}\right) + Q - \rho c\frac{\partial \emptyset}{\partial t} = 0 \quad \ldots(7)$$

dengan disertakan kekhususan dari kondisi awal dan syarat batas.

Sudah diperlihatkan bahwa masalahnya dinyatakan dalam waktu dan tempat, yang terlebih dahulu memerlukan kekhususan dari syarat awal. Dalam hal ini, variabel bebasnya adalah x, y, dan t. Permasalahan ini invarian dengan waktu, sehingga $\frac{\partial \emptyset}{\partial t} = 0$, maka persamaan (2) atau (7) menjadi sederhana. Selanjutnya, dapat dituliskan menjadi persamaan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \emptyset}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \emptyset}{\partial y}\right) + Q = 0 \quad \ldots(8)$$

penyelesaian yang dikehendaki hanya pembebanan dari syarat batas persamaan (5) dan (6).

Dalam gambar 1b, diperlihatkan aliran kontinu pada kondisi yang tidak berubah (tetap) terhadap y. Persamaan (8) dapat diubah untuk harga y yang tetap sehingga dihasilkan persamaan diferensial biasa sebagai berikut :

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{d\emptyset}{dx}\right) + Q = 0 \quad \ldots(9)$$

yang terletak pada *domain* $0 \leq x \leq L_x$.

Masalah aliran panas, yang muncul secara khusus dari beberapa keadaan fisik yang lain, sesungguhnya dapat diidentifikasi pada

1. perputaran aliran air yang baik. Jika diambil k = 1, Q = 0, persamaan (8) dapat diturunkan menjadi bentuk Laplace yang sederhana, yaitu:

$$\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial y^2} \equiv \nabla^2 \emptyset = 0 \ldots (10)$$

2. aliran dari fluida pada suatu medium yang dapat ditembus. Di sini diambil Q = 0 dan k sebagai daya serap dari medium sehingga $\emptyset$ harus memenuhi persamaan (8)

3. deformasi kecil dari membran yang disebabkan gaya cabang terhadap tegangan dari membrane. Persamaan (8) adalah persamaan yang menentukan pembengkokan melintang $\emptyset$.

Perbedaan Terhingga dalam Satu Dimensi

1. Masalah Perbedaan Terhingga dalam Satu Dimensi

Seperti telah dipelajari mengenai masalah harga batas berdimensi satu, sekarang ditentukan fungsi $\emptyset(x)$ yang memenuhi suatu persamaan diferensial dengan domain $0 \leqq x \leqq L_x$, dan syarat batas pada x = 0 dan x = L_x. Contoh khas dari masalah ini adalah akan dihitung distribusi suhu $\emptyset(x)$ melalui suatu ketebalan L_x dan daya hantar panas k pada x = 0 dan x = L_x. Juga, terdapat temperatur berturut-turut, yaitu $\overline{\emptyset}_0$ dan $\overline{\emptyset}_L$ dengan kecepatan perambatan panas Q (x) persatuan panjang dalam papan. Bentuk persamaan diferensial dari masalah ini ditulis

$$k\frac{d^2\emptyset}{dx^2} = -Q(x) \quad \ldots (11)$$

Apabila dibuat asumsi bahwa daya hantar panas dari bahan adalah konstan, syarat-syarat batas seperti yang tertulis pada persamaan (5) dapat ditulis dengan

$$\emptyset(0) = \overline{\emptyset}_0,\ \emptyset(\mathrm{Lx}) = \overline{\emptyset}_L \ldots (12)$$

Untuk menyelesaikan permasalahan ini, digunakan metode perbedaan terhingga yang dimulai dengan penurunan variabel bebas x. Sekumpulan mata jala dibuat dengan L + 1 pembagian secara diskrit yang sama oleh titik-titik X_L (L = 0, 1, 2, …, L) dari domain $0 \leqq x \leqq L_x$ (lihat gambar 3) dengan $x_0 = 0$ dan $x_L = L_x$ serta $x_{L+1} - x_L = \Delta x$.

Langkah selanjutnya adalah menggantikan simbol dalam persamaan diferensial yang meliputi turunan dengan simbol yang hanya melibatkan operasi aljabar. Proses ini penting karena melibatkan suatu perkiraan yang dapat dilaksanakan dengan menggunakan perkiraan perbedaan terhingga untuk fungsi turunan.

2. Perkiraan Perbedaan Terhingga dari Turunan

Dengan menggunakan teorema Taylor's, dapat ditulis persamaan sebagai berikut:

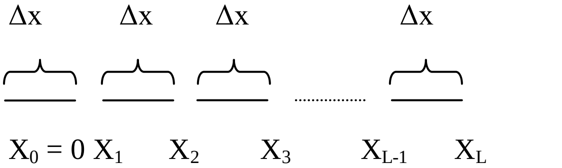
$$\emptyset(x_{L+1}) = \emptyset(x_L) + \Delta x$$

$$\emptyset(x_L) + \Delta x \left.\frac{d\emptyset}{dx}\right|_{x=x_L} + \frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{d^2\emptyset}{dx^2}\right|_{x=x_L+\theta_1 \Delta x} \ldots (13)$$

Dengan θ_1 merupakan suatu bilangan dalam *domain* $0 \leqq \theta_1 \leqq 1$. Digunakan pembagian kesatu untuk menyatakan x = x_L, maka persamaan (13) di atas dapat ditulis

$$\emptyset_{l+1} = \emptyset_l + \Delta x \left.\frac{d\emptyset}{dx}\right|_L + \frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{d^2\emptyset}{2}\right|_{L+\emptyset_1} \ldots (14)$$

Salah satu mata jala



Gambar 2 Konstruksi dari mata jala perbedaan terhingga pada interval $0 \leqq x \leqq L_x$.

Karena itu,

Masalah Harga Batas Kontinu dan Penggunaannya pada Diskritisasi Numerik dari Metode Perbedaan Terhingga

$$\frac{d\emptyset}{dx}\Big|_L = \frac{\emptyset_{L+1}-\emptyset_L}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{2}\frac{d^2\emptyset}{2}\Big|_{L+\emptyset_1} \quad \ldots(15)$$

Persamaan 15 menunjukkan perkiraan diferensial yang merupakan turunan pertama suatu fungsi. Perkiraan diferensial awal dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{d\emptyset}{dx}\Big|_L = \frac{\emptyset_{L+1}-\emptyset_L}{\Delta x} \quad \ldots(16)$$

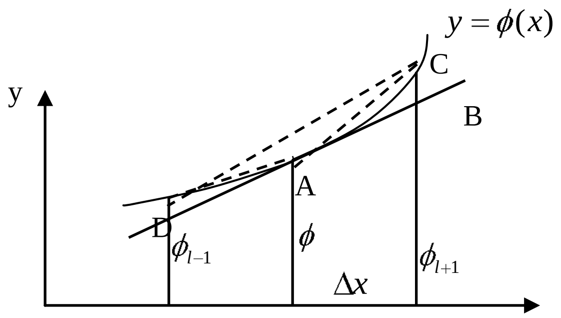
Kesalahan E dalam perkiraan dapat ditulis

$$E = -\frac{\Delta x^2}{2}\frac{d^2\emptyset}{2}\Big|_{L+\emptyset_1} \quad \ldots(17)$$

E merupakan perkalian konstanta dengan Δx. Dikatakan bahwa kesalahannya adalah $0(\Delta x)$ yang disebut juga sebagai tingkat kesalahan. Nilai sebenarnya dari θ_1 tidak diberikan dengan teorema Taylor's, tetapi mengikuti persamaan

$$|E| \le \frac{\Delta x}{2}\max_{[x_L,\, x_{L+1}]}\left|\frac{d^2\emptyset}{dx^2}\right| \quad \ldots(18)$$

Grafik pendekatan diturunkan secara matematis. Turunan pertama dari $\emptyset(x)$ pada x = x_L adalah kemiringan dari garis singgung pada kurva y = $\emptyset(x)$. Titik x = x_L yaitu kemiringan dari garis AB. Perkiraan diferensial awal merupakan kemiringan dari garis AC, yang merupakan kemiringan dari pendekatan garis AB sebagai tebal mata jala Δx yang sangat kecil.



Gambar 1. Pernyataan Grafik dari Beberapa Perkiraan Diferensial Terhingga dari $\frac{d\phi}{dx}\Big|_l$.

Diferensial awal kemiringan dari AC. Diferensial akhir – kemiringan dari DA. Diferensial utama – kemiringan dari DC.

Dengan cara yang sama, dapat digunakan teorema Taylor's sehingga menghasilkan persamaan

$$\phi_{l-1} = \phi_l - \Delta x\frac{d\phi}{dx}\Big|_l + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{d^2\phi}{dx^2}\Big|_{l-\phi_2} \quad \ldots(19)$$

dengan $0 \le \phi_2 \le 1$. Pernyataan ini ditulis kembali menjadi

$$\frac{d\phi}{dx}\Big|_l = \frac{\phi_l - \phi_{l-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2}\frac{d^2\phi}{dx^2}\Big|_{l-\phi_2} \quad \ldots(20)$$

Dari persamaan (10), didapatkan perkiraan diferensial akhir yaitu :

$$\frac{d\phi}{dx}\Big|_l \approx \frac{\phi_1 - \phi_{l-1}}{\Delta x} \quad \ldots(21)$$

Kesalahan E dalam pendekatan ini adalah $0(\Delta x)$, dan sekarang

$$|E| \le \frac{\Delta x}{2}\max_{[x_{l-1},\, x_l]}\left|\frac{d^2\phi}{dx^2}\right| \quad \ldots(22)$$

Gambaran grafik perkiraan diferensial akhir dapat terlihat dalam gambar 3.2. Kemiringan garis AB sekarang merupakan perkiraan kemiringan dari garis AD.

Kesalahan perkiraan diferensial akhir pada tingkat yang sama adalah $0(\Delta x)$. Bagaimanapun, jika diulang, perluasan persamaan (14) dan (19) akan berubah menjadi

$$\phi_{l+1} = \phi_l + \Delta x\frac{d\phi}{dx}\Big|_l + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{d^2\phi}{dx^2}\Big|_l + \frac{\Delta x^3}{6}\frac{d^3\phi}{dx^3}\Big|_{l+\phi_3} \qquad 0 \le \phi_3 \le 1$$

$$\phi_{l-1} = \phi_l - \Delta x\frac{d\phi}{dx}\Big|_l + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{d^2\phi}{dx^2}\Big|_l - \frac{\Delta x^3}{6}\frac{d^3\phi}{dx^3}\Big|_{l-\phi_3} \qquad 0 \le \phi_4 \le 1$$

Kedua persamaan di atas diberi nama persamaan (23a) dan (23b).

Hal ini merupakan gambaran yang sangat nyata untuk turunan pertama yang dihasilkan dengan mengurangi persamaan (23b) pada persamaan (23a) sehingga persamaan akhirnya menghasilkan persamaan sebagai berikut :

$$\phi_{l+1} - \phi_{l-1} = 2\Delta x \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_l + \frac{\Delta x^3}{6}\left(\left.\frac{d^3\phi}{dx^3}\right|_{l+\phi_3} + \left.\frac{d^3\phi}{dx^3}\right|_{l-\phi_4} \right)$$

Persamaan di atas disebut persamaan (24).

Penggunaan turunan pada perkiraan diferensial utama adalah

$$\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_l \approx \frac{\phi_{l+1} - \phi_{l-1}}{2\Delta x} \qquad \ldots (25)$$

dan kesalahan E dalam perkiraan ini adalah

$$|E| \le \frac{\Delta x^2}{6} \max_{x_{l-1},\, x_{l+1}} \left|\frac{d^3\phi}{dx^3}\right| \qquad \ldots (26)$$

Sekarang diperoleh gambaran lebih antara perkiraan diferensial awal dan perkiraan diferensial akhir dengan kesalahan $0(\Delta x^2)$. Gambaran grafiknya merupakan kemiringan dari garis AB dengan kemiringan garis DC sehingga penjumlahan perluasan Taylor'snya adalah

$$\phi_{l+1} = \phi_l + \Delta x \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_l + \frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_l + \frac{\Delta x^3}{6}\left.\frac{d^3\phi}{dx^3}\right| + \frac{\Delta x^4}{24}\left.\frac{d^4\phi}{dx^4}\right|_{l+\phi_5} \qquad \ldots (27a)$$

$$\phi_{l-1} = \phi_l - \Delta x \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_l + \frac{\Delta x^2}{2}\left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_l - \frac{\Delta x^3}{6}\left.\frac{d^3\phi}{dx^3}\right| + \frac{\Delta x^4}{24}\left.\frac{d^4\phi}{dx^4}\right|_{l+\phi_5} \qquad \ldots (27b)$$

Dengan ketentuan $0 \le \phi_5 \le 1$.

Setelah menjumlahkan persamaan (27a) dan persamaan (27b), didapatkan persamaan turunan keduanya sebagai berikut :

$$\left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_l = \frac{\phi_{l+1} - 2\phi_l + \phi_{l-1}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{24}\left(\left.\frac{d^4\phi}{dx^4}\right|_{l+\phi_5} + \left.\frac{d^4\phi}{dx^4}\right|_{l+\phi_5} \right) \qquad \ldots (28)$$

sehingga didapatkan perkiraan turunan kedua

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\phi_{l+1} - 2\phi_l + \phi_{l-1}}{\Delta x^2} \qquad \ldots (29)$$

dengan kesalahan E dari perkiraan ini dinyatakan dengan $0(\Delta x)^2$ dan memenuhi persamaan berikut:

$$|E| \le \frac{\Delta x^2}{12} \max_{x_{l-1},\, x_{l+1}} \left|\frac{d^4\phi}{dx^4}\right| \qquad \ldots (30)$$

Penyelesaian Persamaan Diferensial dengan Metode Perbedaan Terhingga

Jika diperhatikan persamaan (11) pada titik mata jala x_l, didapatkan persamaan sebagai berikut :

$$k\left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_l = -Q_l \qquad \ldots (31)$$

Dengan menggunakan perkiraan dari persamaan (29), dapat dihasilkan persamaan

$$k\frac{\phi_{l+1} - 2\phi_l + \phi_{l-1}}{\Delta x^2} = -Q_l \qquad \ldots (32)$$

Akan timbul beberapa persamaan di titik mata jala bagian dalam x_l (l = 1, 2, 3, …, L-1) pada mata jala perbedaan terhingga.

Beberapa persamaan itu adalah

$$l=1 \rightarrow \quad -\phi_2+2\phi_1=\frac{\Delta x^2 Q_1}{k}+\overline{\phi_0}$$
$$l=2 \rightarrow -\phi_3+2\phi_2-\phi_1=\frac{\Delta x^2 Q_2}{k}$$
$$l=3 \rightarrow -\phi_4+2\phi_3-\phi_2=\frac{\Delta x^2 Q_3}{k} \quad \ldots (33)$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$l=L-2 \rightarrow -\phi_{L-1}+2\phi_{L-2}-\phi_{L-3}=\frac{\Delta x^2 Q_{L-2}}{k}$$
$$l=L-1 \rightarrow 2\phi_{L-1}-\phi_{L-2}=\frac{\Delta x^2 Q_{L-1}}{k}+\overline{\phi_{L_x}}$$

Jika ϕ merupakan suatu vektor kolom yang merupakan transpose dari $(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\ldots,\phi_{L-2,}\phi_{L-1})$, himpunan persamaan ini dapat ditulis secara persamaan matriks tunggal sebagai berikut :

$$K\,\phi=f \quad \ldots (34)$$

dengan

$$K=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & & & & \\ & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \ldots (35)$$

$$f=\begin{bmatrix} \frac{\Delta x^2}{k}Q_1+\overline{\phi_0} \\ \frac{\Delta x^2}{k}Q_2 \\ \frac{\Delta x^2}{k}Q_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\Delta x^2}{k}Q_{L-1}+\overline{\phi_{L_x}} \end{bmatrix} \quad \ldots (36)$$

Contoh 1.

Carilah jawaban dari persamaan $\frac{d^2\phi}{dx^2}-\phi=0$ dengan syarat batas $\phi=0$ pada x = 0 dan $\phi=1$ pada x = 1. Jarak mata jala $\Delta x=1/3$.

Yang harus dicari dalam soal ini adalah harga $\phi_0=0$ dan $\phi_3=1$. Hasil persamaan pada titik umum mata jala x_l adalah

$$\left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_l-\phi_l=0 \quad \ldots (1)$$

Yang dapat dinyatakan dengan bentuk diferensial terhingga. Selanjutnya, digunakan persamaan (3.19) sebagai berikut L

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=\frac{\phi_{l+1}-2\phi_l+\phi_{l-1}}{\Delta x^2}$$

maka persamaan (1) menjadi

$$\left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_l-\phi_l=\phi_{l+1}-2\phi_l+\phi_{l-1}-\Delta x^2\phi_l=0$$

Persamaan di atas digunakan untuk l=1 dan l=2 pada dua titik bagian dalam dan menyisipkan syarat yang diketahui sehingga memberikan bentuk persamaan

untuk l=1, $\phi_0=0$ dan $\Delta x=1/3$

$$\phi_2-2\phi_1+\phi_0-(1/3)^2\phi_1=0$$
$$\phi_2-2\frac{1}{9}\phi_1=0 \quad \ldots (2)$$

untuk l=2, $\phi_a=1$ dan $\Delta x=1/3$

$$\phi_3-2\phi_3+\phi_1-(1/3)^2\phi_2=0$$
$$1-2\frac{1}{9}\phi_2+\phi_1=0$$

atau

$$2\frac{1}{9}\phi_2-\phi_1=1 \quad \ldots (3)$$

Persamaan (2) dan (3) dieleminasi sebagai berikut :

$$\begin{array}{ll} \phi_2 - 2\frac{1}{9}\phi_1 = 0 & \times 2\frac{1}{9} \\ 2\frac{1}{9}\phi_2 - \phi_1 = 0 & \times 1 \\ \hline 2\frac{1}{9}\phi_2 - \frac{361}{81}\phi_1 = 0 & \\ 2\frac{1}{9}\phi_2 - \quad \phi_1 = 1 & \\ \hline -\frac{280}{81}\phi_1 = -1 & \\ \phi_1 = \frac{81}{280} \rightarrow \phi_1 = 0.2893 & \end{array} \quad \ldots (4)$$

Persamaan (4) disubtitusi pada persamaan (2)

$$\phi_2 - 2\frac{1}{9}(0.2893) = 0$$
$$\phi_2 - 0.6107 = 0 \rightarrow \phi_2 = 0.6107$$

sekarang didapatkan harga dari $\phi_1 = 0.2893$ dan $\phi_2 = 0.6107$.

Ketelitian Pendekatan Elemen Hingga

Karena tujuannya adalah menghitung pendekatan jawab persoalan harga batas, dengan sendirinya muncul pertanyaan mengenai ketelitian pendekatan ini. Setiap pemakai metode elemen hingga yang bertanggung jawab harus memikirkan persoalan ketelitian. Juga, harus memikirkan bagaimana pengaruhnya pada kesalahan jawab pendekatan jika jumlah elemen dalam jaringan bertambah.

Kesalahan-kesalahan perkiraan pada penyelesaian numerik timbul karena tiga penyebab utama. Pertama, dan paling penting, adalah kesalahan diskritisasi yang menyebabkan penyelesaian tak lengkap dari persamaan utama dan syarat batas yang dikenal sebagai perkiraan fungsi percobaan. Kedua, kesalahan pembulatan yang disebabkan kenyataan bahwa hanya suatu jumlah informasi terbatas yang bisa disimpan dalam beberapa tahap pada proses perhitungan. Kesalahan ketiga disebabkan pendekatan-pendekatan yang terlibat dalam model matematika yang diterapkan pada penyelesaian numerik. Dengan perkembangan ketelitian komputer sekarang ini, kesalahan pertama dan kedua dapat diminimalkan. Sekarang perhatian akan dipusatkan kepada kesalahan diskritisasi yang timbul karena proses-proses pendekatan yang diterapkan.

Kesalahan terjadi pada pendekatan elemen hingga dalam fungsi E yang didefinisikan sebagai perbedaan antara jawab eksak dengan jawab pendekatan. Kesalahan yang sebetulnya tak pernah dihitung kecuali jika jawaban eksak diketahui sehingga mula-mula terlihat sedikit alasan untuk menghitung kesalahan. Meskipun ϕ tak diketauhi, dimungkinkan untuk membuat estimasi kesalahan dan menentukan apakah kesalahan berkurang jika ukuran mata jala mengecil dan jumlah elemen membesar. Informasi semacam ini mempunyai kegunaan yang besar dalam perhitungan elemen hingga. Hal ini dapat dipergunakan untuk menentukan estimasi pertambahan ketelitian yang dapat diharapkan jika banyak elemen dibagi lagi menjadi elemen yang lebih kecil lagi. Akan tetapi, penulis tidak akan membahas kesalahan dan ketelitian pendekatan elemen hingga secara mendetail.

Syarat Batas Turunan

Seringkali dalam satu masalah nyata, syarat batas dinyatakan dalam bentuk turunan. Misalkan, diasumsikan permukaan x = L_x dari papan (lempengan) sebagai pokok persoalan untuk syarat dalam menunjukkan fluks panas q yang melalui permukaan (syarat dari persamaan (6) yang dipergunakan). Penggunaan persamaan (6) merupakan syarat yang tepat pada x = L_x. Persamaan itu adalah

$$-k\frac{d\phi}{dx} = \bar{q} \qquad \text{pada } x = L_x \qquad \ldots (37)$$

Persamaan (37) menyatakan bahwa fluks panas q dalam arah x adalah sebanding dengan perubahan temperatur dalam arah x. Tanda negatif menunjukkan bahwa aliran panas berlawanan arah dengan kenaikan temperatur.

Jika pekerjaan dari bagian sebelumnya diulangi dan ditulis persamaan perbedaan terhingga pada masing-masing titik bagian, akan didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$-\phi_2 + 2\phi_1 = \frac{\Delta x^2 Q_1}{k} + \phi_0$$
$$-\phi_3 + 2\phi_2 - \phi_1 = \frac{\Delta x^2 Q_2}{k} \qquad \dots (38)$$
$$-\phi_4 + 2\phi_3 - \phi_2 = \frac{\Delta x^2 Q_3}{k}$$

$$-\phi_{L-1} + 2\phi_{L-2} - \phi_{L-3} = \frac{\Delta x^2 Q_{L-2}}{k}$$
$$-\phi_L + 2\phi_{L-1} - \phi_{L-2} = \frac{\Delta x^2 Q_{L-1}}{k}$$

Karena ϕ_L sekarang tidak diketahui, himpunan dari L-1 persamaan dengan L parameter yang diketahui yaitu $\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_{L-1,} \phi_L$. Persamaan yang hilang dapat diberikan dengan syarat batas dari persamaan (4.1) dan dapat ditulis

$$\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_L = -\frac{\bar{q}}{k} \qquad \dots (39)$$

Jika turunan diganti dengan perkiraan diferensial akhir dari persamaan (11), syaratnya menjadi

$$\frac{\phi_L - \phi_{L-1}}{\Delta x} = -\frac{\bar{q}}{k} \qquad \dots (40)$$

Persamaan ini bersama-sama dengan persamaan (38) menghasilkan himpunan persamaan yang lengkap dengan parameter yang tak diketahui yaitu $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_L$

Contoh 2.

Perhatikan kembali persamaan $\frac{d^2\phi}{dx^2} - \phi_l = 0$, tetapi sekarang dengan kondisi batas $\phi = 0$ pada x = 0 dan $\frac{d\phi}{dx} = 1$ pada x = 1. Jika mata jala perbedaan terhingga seperti yang terlihat dalam gambar 2, hal yang tak diketahui adalah ϕ_1, ϕ_2 dan ϕ_3, dengan syarat batas

$\phi_0 = 0$ dan $\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_3 = 1$.

Perkiraan perbedaan terhingga berubah menjadi

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \phi_l = 0 \qquad \dots (1)$$

dengan ketentuan bahwa $\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\phi_{l+1} - 2\phi_l - \phi_{l-1}}{\Delta x^2}$

Persamaan (1) berubah menjadi

$$\phi_{l+1} - 2\phi_l - \phi_{l-1} - \Delta x^2 \phi_l = 0$$

Perkiraan persamaan perbedaan terhingga pada l = 1 dan pada l = 2 adalah sebagai berikut:

l = 1 $\rightarrow \phi_2 - 2\phi_1 - \phi_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \phi_1 = 0$ karena $\phi_0 = 0$, l = 1 persamaannya akan berubah menjadi

$$-\phi_2 + 2\frac{1}{9}\phi_1 = 0 \qquad \dots (2)$$

l = 2 $\rightarrow \phi_3 - 2\phi_2 - \phi_1 - \frac{1}{9}\phi_2 = 0$

$$\rightarrow \phi_3 + 2\frac{1}{9}\phi_2 - \phi_1 = 0 \qquad \dots (3)$$

Penggunaan pernyataan perbedaan akhir dari syarat batas turunan pada l = 3 menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\phi_3 - \phi_2}{\frac{1}{3}} = 1 \qquad \ldots (4)$$

Perhatikan persamaan (2), (3), dan (4) yaitu:

$$-\phi_2 + 2\frac{1}{9}\phi_1 = 0 \rightarrow \phi_1 = \frac{9}{19}\phi_2 \qquad \ldots (5)$$

$$-\phi_3 + 2\frac{1}{9}\phi_2 - \phi_1 = 0 \qquad \phi_3 - \phi_2 = \frac{1}{3}$$

Persamaan (5) disubstitusikan pada persamaan (3)

$$-\phi_3 + 2\frac{1}{9}\phi_2 - \frac{9}{19}\phi_2 = 0$$
$$\underline{\phi_3 \quad -\phi_2 \qquad = \frac{1}{3}}$$

$$-\phi_3 + \frac{280}{171}\phi_2 = 0$$
$$\underline{\phi_3 - \phi_2 \qquad = \frac{1}{3}}$$

$$\frac{280}{171}\phi_2 - \phi_2 = \frac{1}{3}$$
$$\frac{109}{171}\phi_2 = \frac{1}{3} \qquad \ldots (6)$$
$$\phi_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{171}{109} \rightarrow \phi_2 = 0.5229$$

Persamaan (6) disubstitusi pada persamaan (2)

$$\left.\begin{array}{l} -\phi_2 + 2\frac{1}{9}\phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0.5229 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} -0.5229 + 2\frac{1}{9}\phi_1 = 0 \\ 2\frac{1}{9}\phi_1 = 0.5229 \\ \phi_1 = 0.5229\cdot\frac{9}{19} \\ \phi_1 = 0.2477 \end{array}$$

$\ldots (7)$

Persamaan (6) dan persamaan (7) disubstitusikan pada persamaan (3) sehingga dihasilkan

$$-\phi_3 + 2\frac{1}{9}\phi_2 - \phi_1; \phi_2 = 0.5228; \phi_1 = 0.2477$$
$$-\phi_3 + 2\frac{1}{9}\cdot 0.5229 - 0.2477 = 0$$
$$-\phi_3 + 1.1093 - 0.2477 = 0$$
$$-\phi_3 + 0.8562 = 0$$
$$\phi_3 = 0.8562$$

Terdapat ketidaktepatan analisis tersebut yang dinyatakan dengan persamaan diferensial. Kesalahan yang ditimbulkan sebesar $0(\Delta x^2)$. Perkiraan perbedaan akhir terhadap turunan dinyatakan dalam syarat batas dengan kesalahan $0(\Delta x^2)$. Hal ini dapat diperbaiki dengan perlakuan turunan syarat batas dengan cara yang berbeda. Pertama, didahulukan titik mata jala sembarang $x_{L+1}(= X_L + \Delta x)$ dengan suhu ϕ_{L+1}. Suhu mempunyai peranan penting pada titik x_{L+1} yang terletak di luar papan yang dianalisis. Dapat digarisbawahi bentuk perbedaan terhingga dari persamaan penentu pada masing-masing titik $x_l(l = 1,2,3,..., L)$ yang dinyatakan dengan

$$-\phi_2 + 2\phi_1 = \frac{\Delta x^2 Q_1}{k} + \overline{\phi_0}$$

$$-\phi_3 + 2\phi_2 - \phi_1 = \frac{\Delta x^2 Q_2}{k}$$

$$-\phi_4 + 2\phi_3 - \phi_1 = \frac{\Delta x^2 Q_2}{k} \qquad \ldots (39)$$

$$. \qquad\qquad .$$

$$-\phi_L + 2\phi_{L-1} - \phi_{L-2} = \frac{\Delta x^2 Q_{L-1}}{k}$$

$$-\phi_{L+1} + 2\phi_L - \phi_{L-1} = \frac{\Delta x^2 Q_L}{k}$$

Persamaan (39) adalah himpunan L persamaan untuk L+1 parameter yang tak diketahui, yaitu $\phi_1, \phi_2, \phi_3, ..., \phi_{L,}\phi_{L+1}$. Sekali lagi, persamaan yang hilang dapat diberikan dengan syarat batas pada x = L_x, tetapi tanpa menggunakan penyajian perbedaan akhir. Perkiraan perbedaan tengah (pokok) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_L \approx \frac{\phi_{L+1} - \phi_{L-1}}{2\Delta x} \qquad \ldots (40)$$

dan ketetapan syarat batas dari persamaan (37)

$$\phi_{L+1} - \phi_{L=1} = \frac{-2\bar{q}\Delta x}{k} \qquad \ldots (41)$$

Dalam cara ini, persamaan dan syarat batas dapat dinyatakan dengan pendekatan dari derajat yang sama.

Contoh 3.

Masalah yang telah dipecahkan pada contoh 2, sekarang akan dilihat kembali dengan menggunakan perkiraan perbedaan utama untuk turunan pada syarat batas x = 1. Dengan jarak mata jala yang sama yaitu $\Delta x = \frac{1}{3}$. Hal yang penting dari masalah ini adalah menempatkan titik mata jala sembarang x_4 dengan penyesuaian harga ϕ_4 sebagai contoh dapat dilihat gambar 1.

Perbedaan terhingga dari persamaan diferensial pada x_1, x_2, x_3 diberikan

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - \phi_1 = 0 \qquad \ldots (1)$$

Dari rumus sebelumnya, diketahui bahwa

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\phi_{l+1} - 2\phi_{l-1} + \phi_{l-1}}{\Delta x^2}$$

maka persamaan (1) menjadi

$$\phi_{l+1} - 2\phi_l + \phi_{l-1} - \Delta x^2 \phi_l = 0$$

Untuk $x_1 \rightarrow -\phi_2 + 2\frac{1}{9}\phi_1 = 0$

$$x_2 \rightarrow -\phi_3 + 2\frac{1}{9}\phi_2 - \phi_1 = 0$$

$$x_3 \rightarrow -\phi_4 + 2\frac{1}{9}\phi_3 - \phi_2 = 0$$

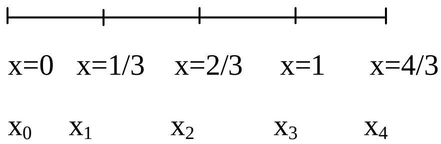
yang menggunakan pemakaian syarat batas.

$$\phi_0 = 0$$

Perbedaan utama syarat batas turunan pada x_3 menghasilkan hubungan penjumlahan

$$\frac{\phi_4 - \phi_2}{2\Delta x} = 1$$

Yang merupakan persamaan (32)



Gambar 4 Perbedaan Terhingga Mata Jala Yang Digunakan pada Contoh 3.

Perhatikan persamaan berikut ini:

$$-\phi_2 + 2\frac{1}{9}\phi_1 = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$-\phi_3 + 2\frac{1}{9}\phi_2 - \phi_1 = 0 \qquad \ldots (2)$$

$$-\phi_4 + 2\frac{1}{9}\phi_3 - \phi_2 = 0 \qquad \ldots (3)$$

$$\phi_4 - \phi_2 = \frac{2}{3} \qquad \ldots (4)$$

Persamaan (4) diubah menjadi bentuk

$$\phi_4 = \frac{2}{3} + \phi_2 \qquad \ldots (5)$$

Persamaan (5) disubstitusikan pada persamaan (3) sehingga dihasilkan persamaan berikut:

$$-\frac{2}{3} - \phi_2 + 2\frac{1}{9}\phi_3 - \phi_2 = 0$$

$$-\frac{2}{3} - 2\phi_2 + 2\frac{1}{9}\phi_3 = 0 \qquad \ldots (6)$$

Persamaan (6) diubah menjadi persamaan

$$2\frac{1}{9}\phi_3 = 2\phi_2 + \frac{2}{3}$$

$$\phi_3 = \frac{18}{19}\phi_2 + \frac{18}{57} \qquad \ldots (7)$$

Persamaan (7) disubtitusikan pada persamaan (2)

$$-\frac{18}{19}\phi_2 - \frac{18}{57} + 2\frac{1}{9}\phi_2 - \phi_1 = 0$$

$$\frac{199}{171}\phi_2 - \phi_1 = \frac{18}{57} \qquad \ldots (8)$$

Perhatikan persamaan (1) dan (8)

$$-\phi_2 + 2\frac{1}{9}\phi_1 = 0 \qquad \times\frac{199}{171}$$

$$\frac{199}{171}\phi_2 - \phi_1 = \frac{18}{57} \qquad \times 1$$

$$-\frac{199}{171}\phi_2 + \frac{3781}{1539}\phi_1 = 0$$

$$\frac{199}{171}\phi_2 - \qquad \phi_1 = \frac{18}{57}$$

$$\frac{3781}{1539}\phi_2 - \phi_1 = \frac{18}{57}$$

$$\frac{2242}{1539}\phi_1 = \frac{18}{57}$$

$$\phi_1 = \frac{18}{57}\cdot\frac{1539}{2242}$$

$$\phi_1 = 0.2168 \qquad (9)$$

Persamaan (9) disubstitusikan pada persamaan (1)

$$-\phi_2 + 2\frac{1}{9}(0.2168) = 0$$

$$-\phi_2 = -0.4577$$

$$\phi_2 = 0.4577$$

Persamaan (9) dan persamaan (1) disubstitusikan pada persamaan (2)

$$-\phi_3 + 2\frac{1}{9}(0.4577) - 0.2168 = 0$$

$$-\phi_3 + 0.9663 - 0.2168 = 0$$

$$-\phi_3 + 0.7495 = 0$$

$$\phi_3 = 0.7495$$

Jawaban dari himpunan persamaan tersebut adalah

$$\phi_1 = 0.2168\ ;\ \phi_2 = 0.4577\ ;\ \phi_3 = 0.7495$$

Kalau dibandingkan jawaban di atas dengan jawaban dari contoh 2, jawaban di atas sangat tepat dengan menggunakan gambaran akhir dari kondisi batas turunan.

Masalah Nonlinear

Model matematika dari masalah fisika menghasilkan persamaan diferensial penentu dan syarat batas dari masalah nonlinear. Mengingat penanggulangan metode analitik dari penyelesaian masalah persamaan linear biasanya gagal dengan persamaan diferensial nonlinear, metode perbedaan terhingga dapat dipakai tanpa modifikasi kedua masalah, baik linear ataupun nonlinear. Dapat dilihat pemakaian metode perbedaan terhingga untuk masalah harga batas linear dari persamaan 3. Jika masalah harga batas adalah nonlinear, pemakaian metode perbedaan terhingga menghasilkan himpunan persamaan nonlinear.

Kembali pada masalah kondisi batas dari contoh pada perbedaan terhingga dalam satu dimensi. Diperlihatkan masalah fisika yang nyata dengan daya hantar panas k diberikan pada fungsi dari temperatur yang dinyatakan dengan φ dari persamaan penentu yang merupakan persamaan nonlinear, yaitu:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{k(\varphi)d\varphi}{dx}\right] = -Q(x) \qquad \ldots(42)$$

Masalah Harga Batas Kontinu dan Penggunaannya pada Diskritisasi Numerik dari Metode Perbedaan Terhingga

Sekarang, digunakan perkiraan perbedaan utama yang dapat ditulis

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{\omega_{L+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{\omega_{L-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad ''' (43)$$

Dengan $L + \frac{1}{2}$ yang diutamakan menunjukkan penilaian pada titik di tengah-tengah antara x_L dan x_{L+1} dan $L - \frac{1}{2}$ dinyatakan secara sama. Dengan demikian, bila ditemukan $= \frac{k(\varphi)d\varphi}{dx}$, persamaan diferensial umum boleh diulang dengan perkiraan perbedaan terhingga, yaitu

$$k\left(\varphi_{1+\frac{1}{2}}\right)\frac{d\varphi}{dx} - k\left(\varphi_{1-\frac{1}{2}}\right)\frac{d\varphi}{dx} = -\Delta x\, Q \quad \ldots(44)$$

Perubahan tanda serta penggantian turunan yang tepat dari perkiraan perbedaan utama menghasilkan persamaan

$$-k\left(\varphi_{1+\frac{1}{2}}\right)[\varphi_{L+1} - \varphi_L] + k\left(\varphi_{1-\frac{1}{2}}\right)[\varphi_L - \varphi_{L-1}] = \Delta x^2\, Q_L$$
…(45)

Penggunaan metode perbedaan terhingga untuk persamaan diferensial nonlinear yang asli menghasilkan himpunan persamaan aljabar nonlinear sebagai berikut :

$$-k\left(\varphi_{1+\frac{1}{2}}\right)\varphi_{L+1} + \left[k\left(\varphi_{1+\frac{1}{2}}\right) - k\left(\varphi_{1-\frac{1}{2}}\right)\right]\varphi_L - k\left(\varphi_{1-\frac{1}{2}}\right)\varphi_{L-1} = \Delta x^2\, Q_L$$
…(46)

Dengan L = 1, 2, 3, … , L – 1.

Hal ini dapat dinyatakan dengan pengurangan persamaan (12) jika k konstan. Ditentukan vektor kolom φ dan f seperti sebelumnya sehingga dapat diselesaikan dengan pemecahan himpunan persamaan nonlinear. Dapat dinyatakan dengan persamaan yang sederhana sebagai berikut

K(φ)φ = f …(47)

Satu contoh sederhana dalam sistem persamaan (47) yang merupakan penyelesaian ulang secara berturut-turut dengan menyatakan harga dari K(φ).

Jika dimulai dari perkiraan yang penting, yaitu dari persamaan

$\varphi = \varphi_0$ ...(48)

Bila dievaliasi dengan matriks, dihasilkan persamaan

$K(\varphi_0) = K_0$ …(49)

Perkiraan untuk $\varphi = \varphi_1$ dapat dinyatakan dengan

$\varphi_1 = K_0^{-1}$ f …(50)

Proses ini dapat dinyatakan secara berulang sebagai berikut :

$\varphi_n = K_{n-1}^{-1}$ f …(51)

Cara kerjanya hanya di antara perbedaan φ_n dan φ_{n-1}. Pendekatan penyelesaian sistem nonlinear ini dapat dijelaskan dengan mengingat pemakaian masalah khusus.

Contoh 4

Selesaikan persamaan $\frac{d}{dx}\left[k\frac{d\varphi}{dx}\right] = 10x$ dengan φ = 0 jika x =1 dengan k = 1 + 0,1φ dan harga Δx yang dipilih adalah $\frac{1}{3}$. Persamaan perbedaan terhingga pada $x = x_L$ dapat ditulis dengan menggunakan persamaan (5.5) sebagai berikut:

$$-k\left(\varphi_{1+\frac{1}{2}}\right)\varphi_{L+1} + \left[k\left(\varphi_{1+\frac{1}{2}}\right) - k\left(\varphi_{1-\frac{1}{2}}\right)\right]\varphi_L - k\left(\varphi_{1-\frac{1}{2}}\right)\varphi_{L-1} = 10\, x_L\, \Delta x^2$$
… (1)

Dari persamaan (1), diambil L = 1, 2 dan syarat batas yang dimasukkan $\varphi_0 = \varphi_3 = 0$ sehingga dihasilkan persamaan

$$L = 1 \rightarrow -k_{\frac{3}{2}}\, \varphi_2 + \left(k_{\frac{3}{2}} + k_{\frac{1}{2}}\right)\varphi_1 = 10\, x_1\, \Delta x^2$$
… (2)

$$L = 2 \rightarrow \left(k_{\frac{5}{2}} + k_{\frac{3}{2}}\right) \varphi_2 - k_{\frac{5}{2}}\, \varphi_1 = 10\, x_1\, \Delta x^2$$ … (3)

Dengan ketentuan bahwa $k_{\frac{3}{2}} = 1 + 0.1\, \varphi_{\frac{3}{2}}$ yang menyatakan nilai φ pada titik tengah di antara mata jala x_1 dan x_2. Salah satu metode untuk memperoleh nilai ini adalah dengan menggunakan pendekatan sebagai berikut:

$$\varphi_{\frac{3}{2}} \approx \left[\frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}\right]$$

Jadi $k_{\frac{3}{2}} = 1 + 0.1 \left[\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right]$ jika $k_{\frac{1}{2}} \approx 1 + 0.1\, \varphi_{\frac{1}{2}}$ dengan $\varphi_{\frac{1}{2}} \approx \left[\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}\right]$

maka $k_{\frac{1}{2}} = 1 + 0.1 \left[\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2}\right]$ juga $k_{\frac{5}{2}} \approx 1 + 0.1\, \varphi_{\frac{5}{2}}$ dengan $\varphi_{\frac{5}{2}} \approx \left[\frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}\right]$

Dengan demikian, persamaan (2) menjadi

$$\left(-1 + 0.1\, \varphi_{\frac{3}{2}}\right)\varphi_2 + \left(1 + 0.1\, \varphi_{\frac{3}{2}} + 1 + 0.1\, \varphi_{\frac{1}{2}}\right)\varphi_1 = 10\, x_1\, \Delta x^2$$

$$\left(2 + 0.1\left[\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right] + 0.1\frac{\varphi_1}{2}\right)\varphi_1 + \left(-1 - 0.1\left[\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right]\right) = 10\, x_1\, \Delta x^2$$

$$(2 + 0.05\, \varphi_2 + 0.1\, \varphi_1)\, \varphi_1 + (-1 - 0.05\, \varphi_1 - 0.05\, \varphi_2)\, \varphi_2 = 10\, x_1\, \Delta x^2$$

$$(2 + 0.1\, \varphi_1 + 0.05\, \varphi_2)\, \varphi_1 + (-1 - 0.05\, \varphi_1 - 0.05\, \varphi_2)\, \varphi_2 = 10\, x_1\, \Delta x^2$$ …(4)

Serta persamaan (3) berubah menjadi

$$\left(1 + 0.1\, \varphi_{\frac{5}{2}} + 1 + 0.1\, \varphi_{\frac{3}{2}}\right) \varphi_1 + \left(-1 - 0.1\, \varphi_{\frac{3}{2}}\right) \varphi_2 = 10\, x_1\, \Delta x^2$$

$$-\left(1 + 0.1\left[\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right]\right)\varphi_1 + \left(2 + 0.1\, \varphi_{\frac{5}{2}} + 0.1\left[\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right]\varphi_2\right) = 10\, x_1\, \Delta x^2$$

$$(-1 - 0.05\, \varphi_1 - 0.05\, \varphi_2)\, \varphi_1 + (2 + 0.05\, \varphi_2 + 0.1\, \varphi_1)\, \varphi_2 = 10\, x_1\, \Delta x^2$$

$$(-1 - 0.05\, \varphi_1 - 0.05\, \varphi_2)\, \varphi_1 + (2 + 0.1\, \varphi_1 + 0.05\, \varphi_2)\, \varphi_2 = 10\, x_1\, \Delta x^2$$

Dari persamaan (4) dan (5), didapat hubungan

$$K(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 + 0.05\,(2\,\varphi_1 + \varphi_2) & -1 - 0.05(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -1 - 0.05(\varphi_1 + \varphi_2) & 2 + 0.05\,(\varphi_1 + 2\,\varphi_2) \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 10\, x_1\, \Delta x^2 \\ 10\, x_1\, \Delta x^2 \end{pmatrix}$$ dengan $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $\Delta x = \frac{1}{3}$

Maka $f = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} \\ \frac{20}{27} \end{pmatrix}$

dengan ketentuan $K\, \varphi = f$

Permulaan dari perkiraan awal adalah $\varphi_0 = \varphi_3 = 0$, maka $K_0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$K\, \varphi = f$

$K_0\, \varphi = f$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} \\ \frac{20}{27} \end{pmatrix}$$

Determinan dari $K_0 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - (-1).(-1) = 4 - 1 = 3$

Jadi, $$\varphi_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{10}{27} & -1 \\ \frac{20}{27} & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\left(\frac{20}{27} + \frac{20}{27}\right)}{3} = \frac{40}{27} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\varphi_1 = \frac{40}{81} = 0.49383$$

$$\varphi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \frac{10}{27} \\ -1 & \frac{20}{27} \end{vmatrix}}{3} = \frac{\left(\frac{40}{27} + \frac{10}{27}\right)}{3} = \frac{50}{27} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\varphi_2 = \frac{50}{81} = 0.61728$$ maka $\psi_1 = \begin{pmatrix} 0.49383 \\ 0.61728 \end{pmatrix}$

Matriks baru K_1 dinyatakan dengan penempatan nilai ψ_1 pada matriks K di atas sehingga dihasilkan

$K_1 = \begin{pmatrix} 2.08025 & -1.05556 \\ -1.05558 & 2.08025 \end{pmatrix}$

$$K_1 \varphi = f$$

$$\begin{pmatrix} 2.08025 & -1.05556 \\ -1.05558 & 2.08025 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} \\ \frac{20}{27} \end{pmatrix}$$

$|K_1|$ = $2.08025)(2.08025) - (-1.05556)(-1.05556)$

= 3.21323

$$\varphi_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{10}{27} & -1.05556 \\ \frac{20}{27} & 2.08025 \end{vmatrix}}{3.21323} = 0.48190$$

$$\varphi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2.08025 & \frac{20}{27} \\ -1.05556 & \frac{10}{27} \end{vmatrix}}{3.21323} = 0.59883$$

maka $\psi_2 = \begin{pmatrix} 0.48190 \\ 0.59883 \end{pmatrix}$

Sekarang matriks baru K_2 berubah dengan memasukkan harga φ_1 dan φ_2 pada iterasi yang kedua, yaitu $\varphi_1 = 0.48190$ dan $\varphi_2 = 0.59883$ pada nilai K.

$K_2 = \begin{pmatrix} 2.07813 & -1.05404 \\ -1.05404 & 2.07813 \end{pmatrix}$ determinan K_2 = 3.20762

$$K_2 \varphi = f$$

$$\begin{pmatrix} 2.07813 & -1.05404 \\ -1.05404 & 2.07813 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} \\ \frac{20}{27} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{10}{27} & -1.05404 \\ \frac{20}{27} & 2.07813 \end{vmatrix}}{3.20762} = 0,48336$$

$$\varphi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2.07813 & \frac{10}{27} \\ -1.05404 & \frac{20}{27} \end{vmatrix}}{3.20762} = 0.60161$$

dan $\psi_2 = \begin{pmatrix} 0.48336 \\ 0.60161 \end{pmatrix}$

Dengan pengulangan proses tersebut, K_3 berubah menjadi K_3 =

$\begin{pmatrix} 2.07842 & -1.05425 \\ -1.05425 & 2.07842 \end{pmatrix}$ determinan K_3 = 3.20839

$$K_3 \varphi = f$$

$$\begin{pmatrix} 2.07842 & -1.05425 \\ -1.05425 & 2.07842 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{27} \\ \frac{20}{27} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{10}{27} & -1.05425 \\ \frac{20}{27} & 2.07842 \end{vmatrix}}{3.20829} = 0.48333$$

dan

$$\varphi_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2.07842 & \frac{10}{27} \\ -1.05425 & \frac{20}{27} \end{vmatrix}}{3.20762} = 0.60158$$

dengan demikian $\psi_2 = \begin{pmatrix} 0.48333 \\ 0.60158 \end{pmatrix}$

SIMPULAN

Pada akhir bahasan ini, dicoba ditarik beberapa simpulan dari beberapa permasalahan yang telah dibahas. Metode elemen hingga adalah suatu teknik umum untuk menyusun jawaban atas pendekatan persolan harga batas. Kesalahan dalam pendekatan elemen hingga adalah fungsi E yang didefinisikan sebagai perbedaan antara jawaban eksak dengan jawaban pendekatan. Pada perkiraan perbedaan terhingga, terdapat tiga macam perbedaan terhingga, yaitu perkiraan perbedaan awal, perkiraan perbedaan utama/tengah, dan perkiraan perbedaan akhir. Pada metode perbedaan terhingga dari beberapa persamaan yang didapat, dapat ditulis dalam satu persamaan matriks tunggal. Pemakaian pendekatan dari perkiraan terhingga diambil dari perluasan deret Taylor. Pada syarat batas turunan, pendekatan diambil dari perkiraan perbedaan akhir.

DAFTAR PUSTAKA

Bambang Suryoatmono. 1990. *Konsep dan Aplikasi Metode Elemen Hingga*. Bandung: Eresco.

Hadipratomo, Winarni. 1985. *Pengenalan Metode Elemen Hingga pada Teknik Sipil*. Bandung: Nova.

Martono, K. 1987 .*Kalkulus Diferensial*. Bandung: Alva Gracia.

O.C. Zienkiewicz dan K. Morgan. 1983. *Finite Element and Approximation*. Singapore: John Wiley and Sons, Inc.

P.A. Surjadi, P.A. 1988. *Aljabar Linier dan Ilmu Ukur Analitik*. Jakarta: Djambatan.

Wirjosoedirdjo, Sri Jatno. 1985. *Elemen-Elemen Hingga Suatu Pengantar Jilid I*. Jakarta: Erlangga.

--------. 1990. *Dasar-dasar Metode Elemen Hingga*. Bandung: Eresco.