PENYELESAIAN PROBLEM KERJA DENGAN BANTUAN GAMBAR GEOMETRI

PROBLEM SOLVING ON WORK PROBLEM USING GEOMETRICAL FIGURES

Wiwip Martono
(Staf Pengajar UP MKU Politeknik Negeri Bandung)

ABSTRAK

Untuk menghitung waktu yang diperlukan dalam menyelesaikan problem kerja (*Work Problem*), diperoleh rumus $\frac{1}{t} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ atau t = $\frac{ab}{a+b}$. Problem kerja ini dapat diperluas untuk variabel yang lebih dari dua buah. Untuk mereka yang tidak menyukai perhitungan dengan pecahan atau perkalian, dapat dipergunakan geometri untuk bidang datar, khususnya penggunaan rumus garis bagi dalam peta garis arah **(***an alignment chart or a nomogram* **)**

Kata kunci : Problem kerja, peta garis arah.

ABSTRACT

To calculate the time required to solve Work Problem, we find the formula $\frac{1}{t} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ *or* $t = \frac{ab}{a+b}$. *This formula can be extended for Work Problem which has more than two variables. For them, who avoid calculating with fraction or multiplication can use the plane geometry, especially formula of bisector on an alignment chart or a nomogram.*

Keywords: *Work Problem, an alignment chart.*

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari, sering ditemukan persoalan sederhana untuk menyelesaikan suatu pekerjaan (*Work Problem*).

Contoh 1.

Pada sebuah ruang sekolah, A dapat membersihkan papan tulis dalam waktu 3 menit dan B dapat membersihkan papan tulis yang sama dalam waktu 6 menit. Jika A dan B bekerja bersama-sama member-sihkan papan tulis itu, hitunglah waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan pekerjaan itu.

Contoh 2.

Pemanas listrik C dapat memanaskan 1 liter air dalam waktu 10 menit dan pemanas listrik D dapat memanaskan 1 liter air yang sama dalam waktu 15 menit. Jika pemanas listrik C dan D dipergunakan bersama-sama, hitunglah waktu yang diperlukan untuk memanaskan 1 liter air itu !

Jawaban untuk soal pertama adalah 2 menit dan untuk soal kedua adalah 6 menit.

Untuk kedua soal di atas, diperoleh rumus $\frac{1}{t} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ atau t = $\frac{ab}{a+b}$. Untuk menghitung t, dapat dipergunakan geometri untuk bidang datar. Syaratnya adalah dapat menggambar peta/*chart* dengan skala benar dengan bantuan penggaris dan jangka.

PEMBAHASAN

Secara umum, persoalan tersebut akan diselesaikan dengan jalan

A dapat menyelesaikan suatu pekerjaan dalam waktu a menit.

B dapat menyelesaikan suatu pekerjaan dalam waktu b menit.

Dalam waktu 1 menit, A dapat menyelesaikan 1/a pekerjaan.

Dalam waktu 1 menit, B dapat menyelesaikan 1/b pekerjaan.

Dalam waktu 1 menit, A dan B dapat menyelesaikan 1/a pekerjaan + 1/b pekerjaan = (a + b) / (a x b) pekerjaan = 1/t pekerjaan.

Jadi, pekerjaan itu dapat diselesaikan dalam waktu **t = (a x b) / (a + b)** menit.

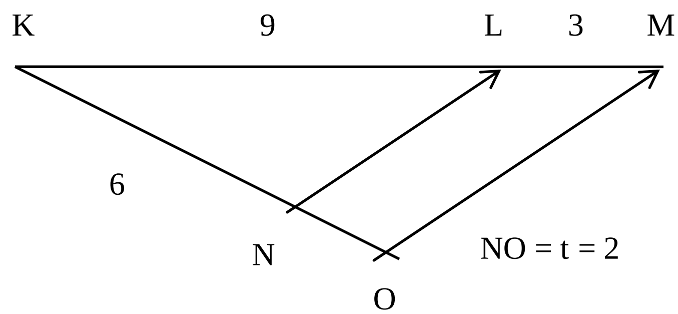
Untuk contoh pertama, solusinya adalah t = (3 x 6) / (3 + 6) menit = 2 menit.
Dalam kehidupan sehari-hari, sebagai contoh dalam bidang Fisika Terapan / Listrik, persoalan yang sama muncul untuk resistor yang dihubungkan paralel, kapasitor yang dihubungkan seri, dan lensa/optika.

Untuk menentukan nilai t = (a x b) / (a + b) dengan geometri terdapat tiga cara berikut ini.

1. Prinsip kesebangunan/ Perbandingan.

(a + b): a = b : t

Jadi, garis t dapat dilukis sebagai pembanding ke empat. Perhatikan gambar 1 di bawah ini. Garis LN sejajar dengan MO.



Gambar 1. Lukisan t = NO sebagai pembanding keempat.

KL : LM = KN : NO atau

9 : 3 = 6 : t

KL = a + b = 3 + 6 = 9 satuan, LM = a = 3 satuan, dan KN = b = 6 satuan, maka akan diperoleh NO = t = 2 satuan.

Menentukan nilai t dengan lukisan.

1. Tarik garis g mendatar dan ukurlah KL = a + b satuan dan LM = a satuan.
2. Tarik garis lain h yang membuat sudut sembarang terhadap garis mendatar dan ukurkan KN = b satuan lalu tariklah garis LN.
3. Dari M, tarik garis yang sejajar dengan LN dan memotong garis h di titik O!

Caranya adalah dengan membuat sudut KMO = sudut KLN (sudut sehadap). Jadi, akan diperoleh NO = t satuan.

Sebaliknya, jika a dan t diketahui, b dapat dihitung sebagai berikut:

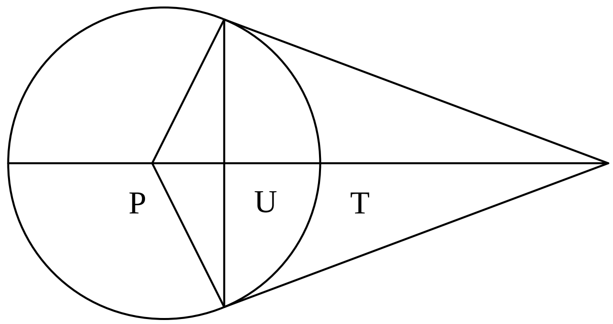
1/b = 1/t – 1/a = (a – t) / a.t atau

b = a.t / (a – t)

(a – t) : a = t : b atau (3 – 2) : 3 = 2 : b dan diperoleh b = 6 satuan.

Jadi, garis b dapat dilukis sebagai pembanding keempat.

2. Prinsip Garis Singgung pada Lingkaran dan Kesebangunan



Gambar 2. Lukisan t = UT dengan Bantuan Garis Singgung.

Sebuah lingkaran dengan pusat P dan jari-jari PT = a satuan.
Titik Q terletak di luar lingkaran dan panjang TQ = b satuan,
PQ = PT + TQ = (a + b) satuan.
QR dan QS adalah garis singgung yang ditarik dari titik Q.
Tariklah garis RS memotong PQ di titik U, maka panjang garis UT = t satuan.
Segi empat PRQS adalah segi empat layang-layang dan RS tegak lurus PQ.
Δ PUR sebangun dengan Δ PRQ (sudut P sekutu dan sudut PUR = sudut PRQ = 90^0). Berlaku rumus
PU : PR = PR : PQ atau
PR.PR = PU.PQ
a.a = (a – t)(a + b) dan diperoleh
UT = t = (a x b) / (a + b) satuan.
Untuk menentukan nilai t dengan lukisan, dilakukan dengan jalan

1. karena sudut PRQ = sudut PSQ = 90^0 , menurut geometri, titik R dan titik S terletak pada busur lingkaran dengan pusat O dan jari–jari PO = OQ = ½ (a +b) satuan. Titik O diperoleh dengan cara membuat sumbu garis PQ yang memotong PQ di O,
2. busur lingkaran dengan pusat O ini akan memotong lingkaran dengan pusat P di titik R dan S,
3. tarik RS memotong PQ di titik U sehingga diperoleh UT = t satuan.

Sebaliknya, jika a dan t diketahui, b dapat dihitung sebagai berikut.

1. Buatlah lingkaran dengan pusat P dan jari-jari PT = a satuan.
2. Buatlah garis UT = t satuan dan di titik U dibuat garis tegak lurus yang memotong lingkaran di titik R dan S.
3. Di titik R dibuat garis tegak lurus/garis singgung yang

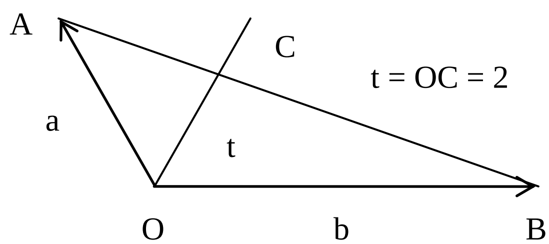
memotong perpanjangan PT di Q dan diperoleh garis TQ = b satuan.

Catatan:
Cara (1) dan (2) untuk menentukan nilai t adalah hasil pemikiran penulis sendiri yang sudah ditulis dalam *Diktat Geometri* (Martono, 2000).

Cara (3) idenya diperoleh dari buku *College Álgebra* (Aufmann dan Nation, 2002: 82) yang membahas work problem dan perluasannya.

3. Dalil Pythagoras /Cosinus dan Rumus Garis Bagi.

Perhatikan gambar 3 (peta garis arah Δ OAB) di bawah ini.



Gambar 3. Lukisan t = Garis Bagi OC Pada Peta Garis Arah

Panjang sisi OA = a = 3 satuan, sudut AOB = 120^0 dan sisi OB = b = 6 satuan.

Buatlah garis bagi sudut AOB yang memotong AB di C. Dengan perhitungan, diperoleh panjang garis bagi OC = t = 2 satuan. Dengan dalil Pythagoras /cosinus, diperoleh sisi AB = $3\sqrt{7}$ satuan.

Rumus untuk garis bagi OC pada segi tiga OAB adalah (Martono, 2000 dan Barnett, 2009)

AC : BC = OA : OB dan

OC^2 = OA.OB – AC.BC

AC : BC = OA : OB = a : b = 3 : 6 = 1 : 2 , dan diperoleh

AC = 1/3 sisi AB = $\sqrt{7}$ satuan dan BC = 2/3 sisi AB = $2\sqrt{7}$ satuan.

OC^2 = OA.OB – AC.BC

= $3.6 - \sqrt{7}.2\sqrt{7} = 4$ dan diperoleh OC = t = 2 satuan.

Jika dinyatakan dengan a dan b, diperoleh sisi AB = $\sqrt{(a^2 + b^2 + ab)}$.

AC : BC = OA : OB = a : b sehingga diperoleh AC = a/(a + b) sisi AB = $(a/(a + b))\sqrt{(a^2 + b^2 + ab)}$ satuan dan BC = b/(a + b) sisi AB = $(b/(a + b))\sqrt{(a^2 + b^2 + ab)}$ satuan.

OC^2 = OA.OB – AC.BC

= $a.b - (a/(a + b))\sqrt{(a^2 + b^2 + ab)}$

$(b/(a + b))\sqrt{(a^2 + b^2 + ab)}$

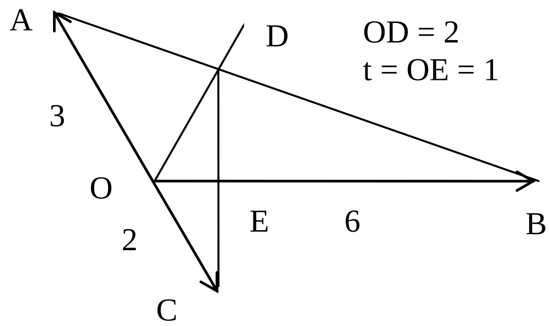
= $(a.b / (a + b))^2$

sehingga diperoleh panjang garis bagi OC = t = (a x b) / (a + b) satuan.
Untuk menentukan nilai t dengan peta garis arah, dilakukan dengan cara berikut.
1. Gambarlah Δ OAB dengan sisi OA = a satuan, sudut AOB = 120^0 dan sisi OB = b satuan (gambar pokok sisi – sudut – sisi)
2. Gambarlah garis bagi sudut AOB yang akan memotong AB di C.
Jadi, diperoleh OC = t satuan.
Menurut Aufmann, dkk. (2002) gambar tersebut disebut *an alignment chart* (peta garis arah) *or a nomogram*.
Dari a, b dan t, jika diketahui dua buah nilai, nilai yang satu lagi dapat ditentukan.
(3.1). Sisi OA = a dan OB = b diketahui, maka nilai OC = t dapat ditentukan.
(3.2). Sisi OA = a dan OC = t diketahui, maka nilai OB = b dapat ditentukan.
(3.3). Sisi OB = b dan OC = t diketahui, maka nilai OA = a dapat ditentukan.

Perluasan problem kerja (*work problem*)

Persoalan ini dapat diperluas untuk tiga orang atau peralatan (Martono, 20000 misalnya A, B, dan C yang dapat menyelesaikan suatu pekerjaan dalam waktu a, b dan c satuan waktu.
Rumusnya adalah $\frac{1}{t} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
dan $t = \frac{axbxc}{axb + axc + bxc}$ satuan waktu.

Catatan : Untuk perluasan problem kerja, hanya dipergunakan peta garis arah karena lebih mudah menggambarkannya.
Contoh 3.
Pompa A dapat mengisi sebuah kolam renang dalam waktu 3 jam.
Pompa B dapat mengisi sebuah kolam renang dalam waktu 6 jam.
Pompa C dapat mengisi sebuah kolam renang dalam waktu 2 jam.
Jika pompa A, B, dan C dipergunakan bersama-sama untuk mengisi kolam renang itu, hitunglah waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan pekerjaan itu.
Jawab : $\frac{1}{t} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1$ atau
$t = \frac{3x6x2}{3x6 + 3x2 + 6x2} = 1$ jam.
Untuk menghindari perhitungan dengan pecahan, dipergunakan peta garis arah (gambar 4).



Gambar 4. Peta Garis Arah untuk $\frac{1}{t} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$

Pada Δ OAB dibuat garis bagi OD kemudian pada Δ ODC dengan sudut DOC = 120^0 dibuat garis bagi OE yang berimpit dengan OB. Jika dibuat dengan skala yang benar, akan diperoleh garis bagi OE = t = 1 jam.

Untuk 4 orang atau 4 peralatan misalnya A, B, C dan D, yang dapat menyelesaikan suatu pekerjaan dalam waktu a, b, c, dan d satuan waktu.
Rumusnya adalah

$\frac{1}{t} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ dan

$t = \frac{axbxcxd}{axbxc + axbxd + axcxd + bxcxd}$

satuan waktu.

Contoh 4.
Empat buah resistor yang dihubungkan secara paralel (Halliday, Resnick, dan Walker, 2008) masing-masing mempunyai resistansi yang besarnya 4 Ω, 12 Ω, 10 Ω, dan 15 Ω.
Hitunglah resistansi total dari rangkaian resistor tersebut!

Jawab :

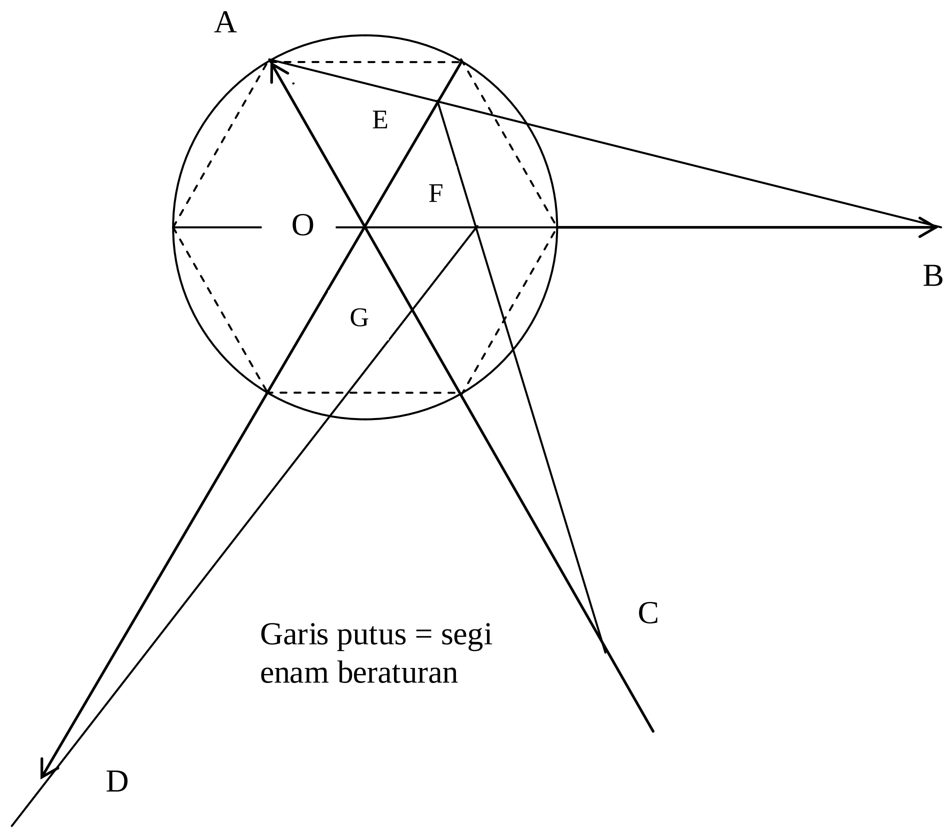
$\frac{1}{Rparalel} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} =$

$\frac{15+5+6+4}{60} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$

sehingga diperoleh R paralel = 2 Ω
atau R paralel =

$\frac{4x10x12x15}{4x10x12 + 4x10x15 + 4x12x15 + 10x12x15}$ Ω = 2 Ω.

Untuk menghindari perhitungan dengan pecahan, dipergunakan peta garis arah (gambar 5).



Gambar 5 Peta Garis Arah untuk $\frac{1}{R_P} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$

Pada Δ OAB, dibuat garis bagi OE kemudian pada Δ OEC dibuat garis bagi OF dan terakhir pada Δ OFD dibuat garis bagi OG. Jika dibuat dengan skala yang benar, akan diperoleh garis bagii OG = t = 2 Ω.
Sisi OA, OB, OC, OD, dan garis bagi OE, OF (yang berimpit dengan OB) dan OG (yang berimpit dengan OC) terletak pada **segi enam beraturan.**

SIMPULAN

Untuk menyelesaikan problem kerja (*Work Problem*) diperoleh rumus

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ atau } t = \frac{ab}{a+b}$$

Ada tiga cara untuk menentukan nilai t dengan bantuan gambar geometri yaitu.

(1) Prinsip kesebangunan/ perbandingan.
(2) Prinsip garis singgung pada sebuah lingkaran dan kesebangunan.

(3) Dalil Pythagoras/Cosinus dan Rumus Garis Bagi.

Dari ketiga cara tersebut, gambar yang paling mudah dibuat adalah cara ketiga dengan cara membuat peta garis arah (*an alignment chart or a nomogram*).
Peta garis arah adalah sebuah segi tiga tumpul OAB dengan sisi OA = a satuan; sisi OB = b satuan; dan sudut apit AOB sebesar 120^0 sehingga diperoleh panjang garis bagi OC = t satuan.

Problem kerja ini dapat diperluas untuk variabel yang lebih besar daripada dua. Untuk mereka yang tidak senang menghitung pecahan, problem kerja dapat diselesaikan dengan cara membuat peta garis arah secara berurutan dan mengukur panjang garis bagi yang terakhir.

SARAN

Peta garis arah sangat mudah dibuat dengan skala yang benar dan akan terletak pada segi enam beraturan.

DAFTAR PUSTAKA

Aufmann, Barker and Nation. 2002. *College Algebra*, 4 th Edition. Boston, New York: Houghton Mifflin Company.

Barnett Rich and Christopher Thomas. 2009. Schaum’s outlines of *Geometry*, 4 th Edition. Mc Graw Hill. Chapter 15. Constructions.

Halliday David, Resnick Robert and Walker Jearl. 2008. *Fundamentals of Physics*, 8 th Edition. Singapore: John Wiley.

Martono Wiwip. 2000. *Diktat Geometri untuk Politeknik.* Bandung: Politeknik Negeri Bandung.