MODEL OSILASI HARMONIK LOGARITMIK PADA GERAK BEBAN DENGAN MASSA YANG BERUBAH SECARA LINIER TERHADAP WAKTU

MODEL OF HARMONIC LOGARITHMIC MOTION OSCILLATION WITH THE MASSCHANGING LINEARLY WITH TIME

Kunlestiowati H., Nani Yuningsih, Sardjito
(Staf Pengajar UP MKU Politeknik Negeri Bandung)

ABSTRAK

Gerak osilasi benda yang melekat pada sistem elastik, seperti pegas, sudah dibahas. Namun, pembahasan tersebut dibatasi untuk benda bermassa konstan, baik untuk osilasi bebas, osilasi teredam, osilasi paksa, maupun osilasi paksa teredam. Pada tulisan ini, akan dibahas osilasi benda yang melekat pada pegas dengan massa benda yang berubah secara linier terhadap waktu. Analisis dimulai dengan membuat model matematis dari osilasi bebas sistem pegas dan massa dengan massa yang berubah secara linier terhadap waktu yang hanya digerakkan oleh gaya elastik. Dari model yang berbentuk persamaan diferensial, diperoleh solusi homogen untuk simpangan setiap saat yang berbentuk fungsi harmonik logaritmik. Dari solusi ini, diperoleh karakteristik adanya gejala relaksasi yang diakibatkan oleh berubahnya massa terhadap waktu, baik relaksasi amplitudo, maupun periode. Analisis dilanjutkan pada keberadaan gaya redaman serta gaya paksa periodik. Seluruhnya menggunakan beban bermassa tidak tetap. Untuk kondisi yang bersifat menyeluruh, yakni osilasi paksa teredam, model gerak berbentuk persamaan diferensial orde dua yang tidak homogen. Solusinya juga berbentuk fungsi harmonik logaritmik.

Kata kunci : osilasi, pegas, massa berubah, fungsi harmonik logaritmik logaritmik

ABSTRACT

Oscillation motion of objects attached to the elastic system, such as a spring, has been much discussed. But, generally the discussion is limited to a constant-mass object, either for free oscillation, damped oscillation, forced oscillation, or forced damped oscillation. In this paper, it will be reviewed the object oscillation attached *to the spring, with the mass of the object changes linearly with time. The analysis begins by making a mathematical model of free oscillation spring system and mass, with mass changes linearly with time, which is only driven by the elastic force. From the model in differential equations, homogeneous solution is obtained for the deviation of each time in the form of harmonic logarithmic function. From this solution, acquired characteristics of the relaxation phenomena caused by the changes in mass over time, both relaxation amplitude, and period. Then, the analysis is continued in the presence of damping force and periodic force, which all used unfixed mass load. For the conditions that are comprehensive, that is forced damped oscillation, the motion models form a second order differential equation which is not homogeneous, the solution also contains a logarithmic harmonic function.*

***Keywords**: oscillation, spring, mass change, harmonic logarithmic function*

PENDAHULUAN

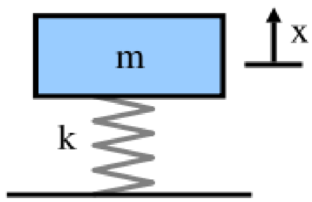
Gerak benda di bawah pengaruh gaya elastik akan memenuhi hukum Hooke sehingga benda tersebut akan berosilasi. Persamaan gerak, yang menghubungkan gaya penyebab gerak serta besaran kinematiknya (posisi, kecepatan, percepatan), dapat diperoleh melalui persamaan gaya dengan definisi gaya yang sederhana yakni massa dikalikan percepatan. Umumnya, pembahasan yang selama ini dilakukan didasarkan asumsi bahwa massa benda yang berosilasi dianggap konstan. Untuk sistem semacam itu, persamaan gerak yang didapat berupa persamaan diferensial orde dua antara posisi terhadap waktu dengan solusi yang akan berbentuk fungsi harmonik periodik (sinus dan atau cosinus) atau fungsi eksponensial.

Bila massa benda yang berosilasi tidak konstan, artinya berubah terhadap waktu, tinjauan model persamaan geraknya masih dapat dilakukan melalui persamaan gaya asalkan definisi gaya diperluas menjadi laju perubahan momentum. Model gerak yang berbentuk persamaan diferensial dengan koefisien-koefisien yang bergantung pada waktu menghasilkan solusi yang berbentuk fungsi harmonik (periodik) logaritmik antara posisi terhadap waktu. Dengan mengambil tinjauan massa yang berubah secara linier terhadap waktu, diperoleh kenyataan bahwa benda tetap bergetar secara harmonik, tetapi periodenya berubah secara logaritmik. Perubahan periode ini menunjukkan terjadinya relaksasi. Selain periode, amplitudonya pun akan berkurang baik karena efek bertambahnya massa benda, maupun karena keberadaan gaya peredam.

PEMBAHASAN

a. Osilasi Benda Bermassa Konstan

Amati suatu benda (= beban bermassa) yang dilekatkan pada ujung sebuah pegas. Jika beban yang melekat pada ujung pegas ini disimpangkan dari keadaan seimbang lalu dilepaskan, benda akan berosilasi secara bebas di sekitar titik seimbangnya dengan amplitudo dan periode yang konstan.



Gambar 1. Pegas dan Beban yang Berosilasi Bebas

Dalam keadaan ini, gaya elastik berlaku karena pegas F_s sebanding dengan panjang peregangan x sesuai dengan hukum Hooke atau bila dirumuskan secara matematis menjadi

$$F = -kx \tag{1}$$

dengan k adalah tetapan pegas.

Karena gaya yang ditimbulkan sebanding dengan percepatan,

$$F = ma = m\left(\frac{dv}{dt}\right) = m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) \tag{2}$$

didapatkan persamaan diferensial homogen,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{3}$$

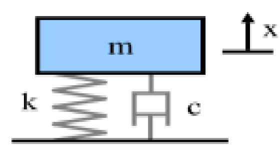
dengan solusi berbentuk fungsi trigonometri dari posisi terhadap waktu

$$x(t) = A\cos(2\pi f_n t). \tag{4}$$

Solusi ini menyatakan bahwa beban akan berosilasi dalam gerak harmonis sederhana yang memiliki amplitudo A dan frekuensi f_n

$$(\ f_n = \omega / 2\pi\ ) \quad \text{atau} \quad fn = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Osilasi teredam akan terjadi pada sistem pegas. Benda tersebut selain bekerja dengan gaya elastik, bekerja pula gaya redaman yang nilainya cukup kecil (*under damping*). Besar gaya redaman (gesekan, hambatan) yang terjadi bergantung pada besar kecepatan dan arahnya berlawanan dengan kecepatan. Konstanta kesebandingannya dinamakan koefisien peredam (c).



Gambar 2. Pegas dan Beban serta Peredam

$$F = -cv = -c\frac{dx}{dt} \tag{5}$$

Dengan menjumlahkan semua gaya yang berlaku pada benda, akan didapatkan persamaan

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{6}$$

Solusi persamaan ini bergantung pada besarnya redaman. Bila redaman cukup kecil, solusinya berbentuk bilangan kompleks dengan sistem masih akan berosilasi namun pada akhirnya akan berhenti. Keadaan ini disebut kurang redam atau redaman kecil (*under damping*) dan merupakan kasus yang paling mendapatkan perhatian dalam analisis vibrasi. Bila peredaman diperbesar sehingga mencapai titik saat sistem tidak lagi berosilasi, dicapai titik redaman kritis (*critical damping*). Bila peredaman ditambahkan melewati titik kritis ini, sistem disebut dalam keadaan lewat redam atau redaman besar (*over damping*). Untuk kondisi lewat redam dan redaman kritis, solusi persamaan diferensial tersebut berbentuk bilangan nyata yang mengecil secara eksponensial terhadap waktu.

Nilai koefisien redaman yang diperlukan untuk mencapai titik redaman kritis pada model massa-pegas-peredam adalah

$$Cc = 2\sqrt{km} \quad (7)$$

Rumus untuk nisbah redaman (ζ) adalah

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

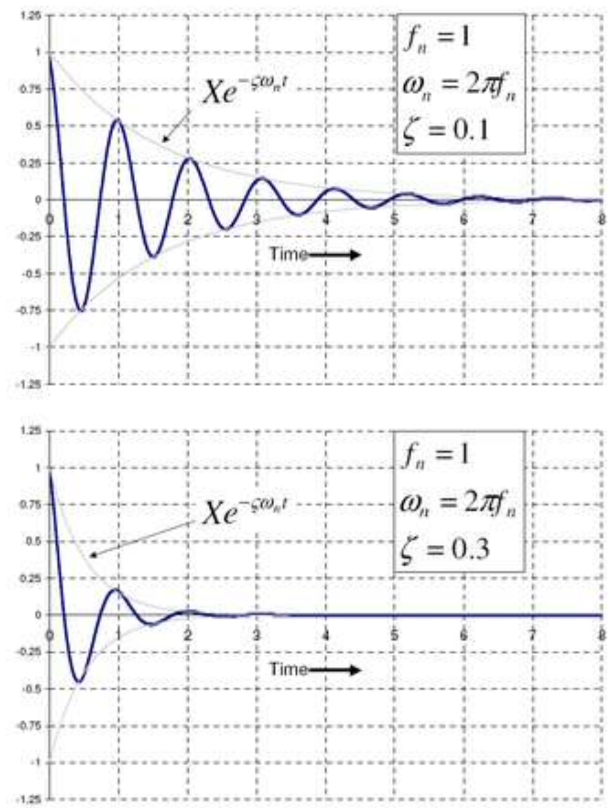
Solusi sistem osilasi dengan redaman kecil

$$x(t) = xe^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t - \phi\right), \omega_n = 2\pi f n$$

(kurang redam) pada model massa-pegas-peredam adalah

(8)

dengan $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$



Gambar 3. Grafik Simpangan terhadap Waktu untuk Osilasi Teredam

Osilasi paksa terjadi karena adanya gaya luar yang bekerja pada suatu sistem sehingga sistem tersebut berosilasi. Gaya luar ini umumnya bersifat periodik misalnya, berbentuk

$$F = Fo\cos(2\pi ft)$$

Dengan kata lain, gaya ini bernilai maksimum F_o dan memiliki frekuensi f.

Dari persamaan gaya dan gerak, akan diperoleh persamaan diferensial orde dua tidak homogen yang mempunyai bentuk

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F(t) \qquad (9)$$

Persamaan diferensial semacam itu akan memiliki solusi yang merupakan resultan dari solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum memiliki bentuk tepat sama dengan solusi yang diperoleh jika ruas kanan persamaan sama dengan nol. Jadi, solusi umum akan berbentuk sama dengan solusi osilasi bebas. Solusi khusus memiliki bentuk fungsi yang mirip dengan fungsi yang ada pada ruas kanan persamaan hanya saja amplitudonya berbeda dengan F_o/m.

Dalam kondisi tunak (*steady state*), biasanya terjadi setelah waktu yang cukup lama, solusi khusus akan lebih dominan. Jadi, solusi umum persamaan tersebut dapat dianggap bernilai kecil sekali (mendekati nol) sehingga solusi tunaknya akan berbentuk

$$X = \{(F_o / m) \;/ [(k/m) - \omega^2]\} \,)\, \cos(2\pi f t)$$

(10)

Osilasi paksa teredam memiliki persamaan gerak yang merupakan hasil perpaduan antara gosilasi teredam dengan osilasi paksa, yakni dalam bentuk

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \qquad (11)$$

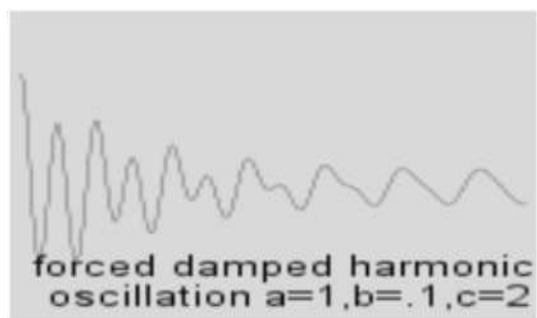
Seperti halnya solusi osilasi paksa, solusi persamaan gerak osilasi paksa teredam pun memiliki dua bagian, yakni solusi umum dan solusi khusus. Saat mencapai keadaan tunak, solusi khusus yang berbentuk

$$x(t) = x\cos(2\pi f t - \phi) \qquad (12)$$

dengan amplitudo

$$x = \frac{F_0}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}}$$

akan menjadi dominan. Hasilnya dapat digambarkan pada gambar berikut.



Gambar 4. Grafik Simpangan terhadap Waktu untuk Osilasi Paksa Teredam

b. Osilasi Beban Bermassa Berubah secara Linier terhadap Waktu

Bila massa benda yang menjadi beban pada sistem osilasi pegas tidak lagi konstan, tetapi berubah terhadap waktu, gaya tidak lagi cukup ditulis sebagai

F = m a

tetapi harus berbentuk

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} = v\left(\frac{dm}{dt}\right) + m\left(\frac{dv}{dt}\right)$$
(13)

Dengan demikian, persamaan gerak untuk osilasi bebas (yang hanya terdiri atas pegas dan beban dengan gaya yang bekerja hanya gaya elastik) menjadi

$$v\left(\frac{dm}{dt}\right) + m\left(\frac{dv}{dt}\right) = -kx \tag{14}$$

Kecepatan adalah $v = \frac{dx}{dt}$

maka persamaan gerak tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -kx$$

Jika massa berubah secara linier terhadap waktu, yakni dalam bentuk

$$m = m_o\left(\frac{t}{t_0}\right) \tag{15}$$

laju perubahannya terhadap waktu

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m_0}{t_o}, konstan \tag{16}$$

dengan asumsi bahwa perubahan nilai frekuensi sudut (ω) sangat kecil sehingga tetapan pegas dapat ditulis sebagai

$$k = m\omega^2 = m\left(\frac{\theta}{t}\right)^2$$

Dengan demikian, persamaan gerak untuk osilasi bebas yang bermassa linier terhadap waktu akan berbentuk

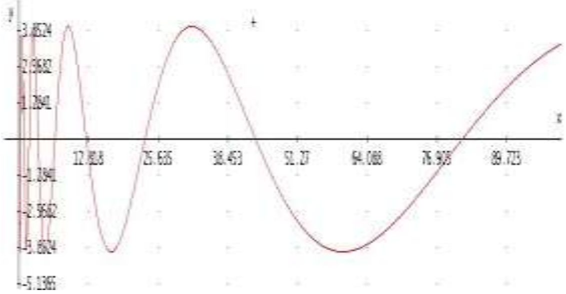
$$t^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + (t)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \theta^2 x = 0$$
(17)

Solusi dari persamaan tersebut berbentuk

$$x(t) = A\sin\theta\ln(Dt) + B\cos\theta\ln(Dt)$$
(18)

dengan A, B, dan D merupakan bilangan-bilangan konstan.

Solusi yang berbentuk fungsi osilasi harmonik logaritmik ini menjadi spesifik karena tampilannya yang memperlihatkan adanya mekanisme relaksasi pada domain waktu (artinya nilai periodenya berubah membesar atau melambat secara logaritmik). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa perubahan massa (yang dalam kasus ini bertambah secara linier terhadap waktu) beban pada sistem getaran mengakibatkan timbulnya gejala relaksasi. Tampilan visual (antara simpangan terhadap waktu) dapat digambarkan sebagai grafik berikut.



Gambar 5. Grafik Simpangan terhadap Waktu untuk Osilasi Bebas dengan Massa yang Berubah Linier terhadap Waktu

Terdapat beberapa kasus khusus dengan bentuk ln (1 + x) yang dapat diambil pendekatannya menjadi x, yakni jika nilai x sangat kecil. Dengan demikian, pada kasus khusus tersebut, bentuk ln (D t) dapat diganti menjadi F t (F konstanta) sehingga solusi tersebut dapat ditulis sebagai

$$x(t) = A\sin \theta Et + B\cos \theta Et$$

yang merupakan solusi dari osilasi bebas untuk massa beban konstan.

Dengan cara perhitungan yang mirip dengan pemodelan getaran teredam dari beban bermassa konstan, untuk sistem osilasi teredam benda bermassa berubah, akan dihasilkan persamaan gerak

$$t^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(t + \frac{ct^2}{m}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \theta^2 x = 0$$

(19)

Sistem osilasi paksa dari benda bermassa berubah mempunyai persamaan gerak

$$t^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + t\left(\frac{dx}{dt}\right) + \theta^2 x = (F_L)$$

(20)

untuk gaya luar yang berubah secara periodik, misalnya berbentuk sinusoida terhadap waktu $F_L = F_{LM}\sin\omega_p t$ sehingga persamaan geraknya akan berbentuk

$$t^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + t\left(\frac{dx}{dt}\right) + \theta^2 x = F_{LM}\sin\omega_p t \quad (21)$$

dengan solusi lengkap yang merupakan penjumlahan solusi umum dan solusi khusus, yakni

$$x(t) = A\sin\theta\ln(Dt) + B\cos\theta\ln(Dt) + E\cos\omega_p t$$

(22)

Osilasi paksa teredam dari benda bermassa berubah akan mempunyai persamaan gerak

$$t^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(t + \frac{ct^2}{m}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \theta^2 x = \left(\frac{t^2}{m}\right)(F_L)$$

(23)

Jika $F_L = F_{LM}\sin\omega_p t$,

diperoleh persamaan gerak lengkapnya

$$t^2\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) + \left(t + \frac{ct^2}{m}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \theta^2 x = \left(\frac{t^2}{m}\right)F_{LM}\sin\omega_p t$$

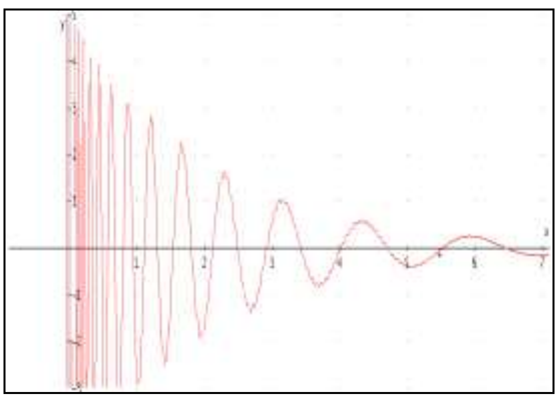
(24)

Dengan menggunakan perangkat lunak *Derive for Windows – 6,* diperoleh solusi dari persamaan diferensial (24) tersebut yang berbentuk

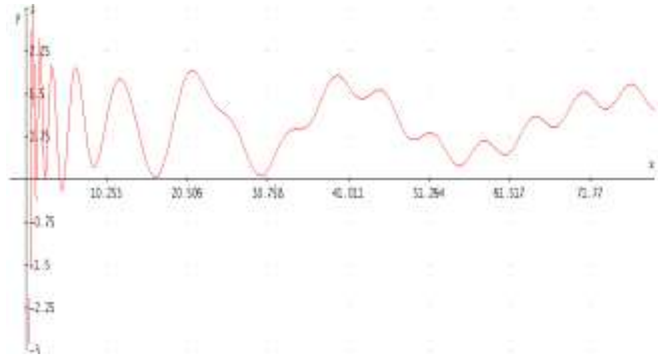
$$x = A + [(1 + t^{(-B)}\{\sin(D \ln Et)\} + G \sin \omega t] e^{(-Ht)} + J \sin (y t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

dengan A. B, D, E, G, H, J, ω , dan y, tetapan.

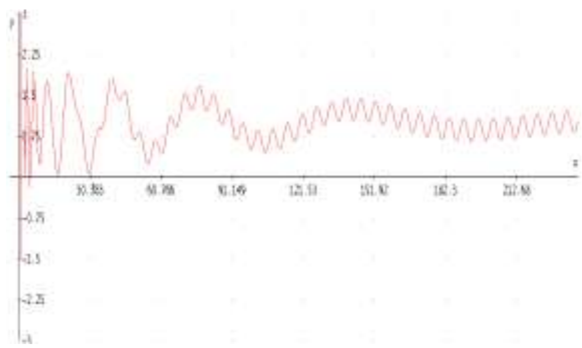
Bila digambarkan dalam bentuk grafik antara simpangan terhadap waktu (menggunakan perangkat lunak *Derive for Windows – 6*), diperoleh visualisasi persamaan (25) seperti pada gambar 6 berikut ini.



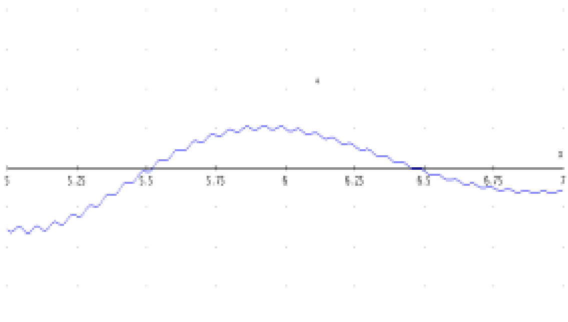
Gambar 6. Grafik Simpangan terhadap Waktu untuk Osilasi Paksa Teredam Sistem Pegas dengan Beban Bermassa tidak Konstan



Gambar 7. Grafik Simpangan terhadap Waktu untuk Osilasi Paksa Teredam Sistem Pegas dengan Beban Bermassa tidak Konstan dalam Kondisi Sesaat setelah *crash*



Gambar 8. Grafik Simpangan terhadap Waktu untuk Osilasi Paksa Teredam Sistem Pegas dengan Beban Bermassa tidak Konstan dalam Kondisi Mendekati Tunak



Gambar 9. Grafik Simpangan terhadap Waktu untuk Osilasi Paksa Teredam Sistem Pegas dengan Beban Bermassa tidak Konstan dalam Kondisi Tunak

Gambar 7, 8, dan 9 merupakan bagian dari gambar 6 untuk tenggat waktu yang dipersempit. Gambar 7 menunjukkan keadaan sesaat setelah gaya luar diberikan pada saat terjadi lonjakan (*crash*). Gambar 8 menunjukkan perubahan simpangan terhadap waktu dalam kondisi mendekati tunak (*steady)* yakni untuk nilai waktu yang cukup besar lama setelah adanya lonjakan pada t = 0. Gambar 9 menunjukkan simpangan terhadap waktu untuk nilai waktu yang sudah cukup lama dihitung dari lonjakan t = 0 sehingga dapat dianggap sebagai keadaan tunak.

Dalam keadaan *crash* (sesaat setelah gangguan), terlihat perubahan yang mencolok, dengan bertambahnya waktu. Terjadi relaksasi baik untuk amplitudo (vertikal) maupun periode mendatar (horizontal). Jadi, amplitudonya mengecil sehingga periodenya bertambah besar. Untuk kondisi tunak, terlihat bahwa di samping ada perubahan global, terjadi pula osilasi yang lebih kecil dengan amplitudo yang sangat kecil. Pemodelan persamaan gerak serta solusi yang diperoleh tersebut menjadi satu hal yang menarik mengingat adanya kenyataan bahwa fungsi osilasi harmonik logaritmik juga merupakan solusi dari Persamaan Voight (Sornette & Sammis, 1995 dalam Pralong, Birrer, Stahel, Funk, 2005). Persamaan Voight sendiri berbentuk

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\alpha}$$
(26)

Persamaan diferensial ini mempunyai solusi osilasi periodik logaritmik

$X = E+F(G-t)^{H}(1 +J \sin (K \log (G – t)+L))$ (27)

Persamaan Voight sering digunakan untuk merumuskan berbagai fenomena fisis yang mengikuti Hukum Pangkat (*Power Law)* seperti peristiwa keretakan struktur, gempa bumi, longsor, hingga ke peristiwa-peristiwa ekonomi dan keuangan (Canessa, 2009). Dengan demikian, dapat diperkirakan bahwa sistem getaran pun, dengan solusi berupa fungsi osilasi harmonik logaritmik, dapat digunakan untuk menjelaskan fenomena-fenomena tersebut.

SIMPULAN

Sistem pegas dengan beban bermassa dapat menghasilkan gerak getaran yang ditandai dengan berubahnya posisi beban terhadap waktu mengikuti fungsi osilasi harmonik logaritmik. Jika massa beban konstan, fungsi posisi terhadap waktu akan berbentuk harmonik murni (sinus dan/atau cosinus). Massa beban yang berubah secara linier mengakibatkan terjadinya relaksasi periode getaran maupun amplitudo. Solusinya merupakan superposisi dari solusi umum yang berbentuk fungsi harmonik logaritmik serta solusi khusus yang berbentuk harmonik murni.

Perlu diteliti lebih lanjut pengaruh massa yang berubah secara umum terhadap waktu pada bentuk solusi persamaan getaran. Dalam penelitian ini, baru dibahas massa yang berubah secara linier terhadap waktu. Selain itu, perlu dihitung secara lebih rinci solusi bagi getaran teredam serta getaran paksa teredam untuk beban yang massanya berubah.

DAFTAR PUSTAKA

Canessa E. 2009. *Stock market and motion of a mass spring*, http//:arXiv.0905.4450vl (q.fin.ST), 27 May

Pralong A., Birrer C., Stahel W.W., Funk M. 2005. *On the predictability of ice avalanches*, Nonlinear Processes in Geophysics, 12, pp 849–861