APLIKASI GEOMETRI, TRIGONOMETRI, DAN INVERS FUNGSI TRIGONOMETRI UNTUK MEMBAGI SEBUAH LINGKARAN MENJADI BEBERAPA BAGIAN YANG SAMA LUASNYA

THE APPLICATION OF GEOMETRY, TRIGONOMETRY, AND INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS TO DIVIDE A CIRCLE INTO SOME PARTS WITH THE SAME AREAS

Wiwip Martono
(Staf Pengajar UP MKU Politeknik Negeri Bandung)

ABSTRAK

Untuk membagi sebuah lingkaran menjadi beberapa bagian yang sama luasnya dilakukan dengan membagi sudut pusatnya. Cara lain dikerjakan dengan metoda geometri atau trigonometri dan invers fungsi trigonometri. Metoda geometri dikerjakan dengan konstruksi geometri, misalnya lingkaran dibagi menjadi beberapa lingkaran lain yang konsentris. Metoda trigonometri dan invers fungsi trigonometri dapat dibagi menjadi tiga, yaitu: a) lingkaran dipotong garis lurus dan terbentuk tembereng lingkaran, b) lingkaran dipotong lingkaran lain dengan jari-jari r yang sama dan terbentuk dua buah tembereng yang simetris, c) lingkaran dipotong lingkaran lain dengan jari-jari R yang berbeda dan pusatnya terletak pada tepi busur lingkaran semula dan terbentuk dua buah tembereng yang tidak simetris. Dengan metoda trigonometri dan invers fungsi trigonometri akan diperoleh persamaan transedental yang dapat dihitung secara numerik dengan program komputer. Kesalahan dari luas irisan lingkaran lebih kecil daripada 1% dan bemtuk irisannya lebih menarik dibandingkan dengan metoda geometri.

Kata kunci: lingkaran, geometri, trigonometri dan invers fungsi trigonometri, segmen.

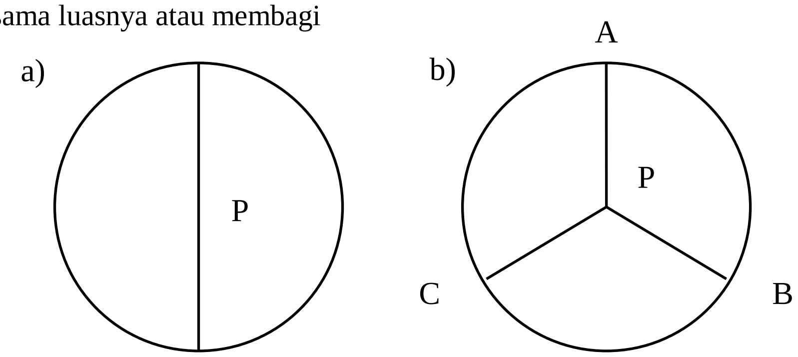
ABSTRACT

Dividing a circle into some parts with the same areas can be done by separating it at its central angle. Geometry, trygonometry, and inverse trigonometric functions are the other methods which can be used for the same purpose. Geometry method is done by using construction geometry, such as a circle is divided into another concentric circles. Trigonometry and inverse trigonometric functions method can be divided into three, i.e: a) the circle is cut by straight lines and there will be a segment of a circle; b) the circle is cut by another circle by the same radius r, as the result there will be two symmetrical segments of a circle; c) the circle is cut by another circle with different radius R and centrelized at the brim of the initial circle, thus there will be two assymmetrical segments of a circle. Using trygonometry and inverse trigonometric functions, the result is transcedental equation that can be calculated numerically using computer program. The error of the circle's cross section will be less than 1% and the shape of the section will be more interesting to see by using geometry method.

Keywords: circle, geometry, trygonometry, inverse trigonomeric functions, segment.

PENDAHULUAN

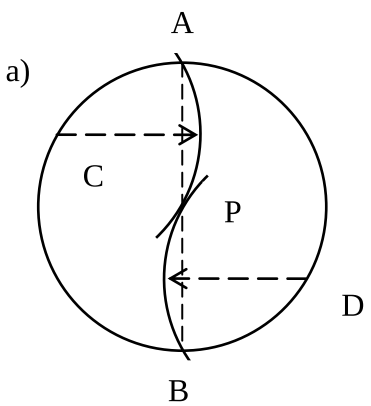
Pada umumnya, makanan seperti pizza, martabak, kue ulang tahun berbentuk silinder tegak dengan penampang berbentuk lingkaran. Yang akan dibahas di sini adalah membagi sebuah lingkaran menjadi beberapa bagian yang sama luasnya atau membagi makanan berbentuk silinder tegak yang sama volumenya. Cara yang sederhana untuk membagi sebuah lingkaran adalah dengan membagi sudut pusatnya oleh garis lurus menjadi beberapa bagian seperti gambar 1a) dan 1b).



Gambar 1a). Sebuah lingkaran dibagi menjadi dua bagian yang sama luasnya
1b). Sebuah lingkaran dibagi menjadi tiga bagian yang sama luasnya

Pada gambar 1a), sudut pusatnya dibagi dua masing-masing sebesar 180^0 dengan menarik sembarang garis melalui pusatnya. Pada gambar 1b), sudut pusatnya dibagi tiga masing-masing sebesar 120^0 dengan menggunakan jangka karena busur sebuah lingkaran dapat dibagi menjadi enam bagian yang sama (prinsip segi tiga sama sisi). Jadi, sudut APB = sudut APC = sudut BPC = 120^0.

Cara lain untuk membagi sebuah lingkaran menjadi dua bagian yang sama luasnya adalah menggunakan busur lingkaran seperti pada gambar 2a) dan 2b)



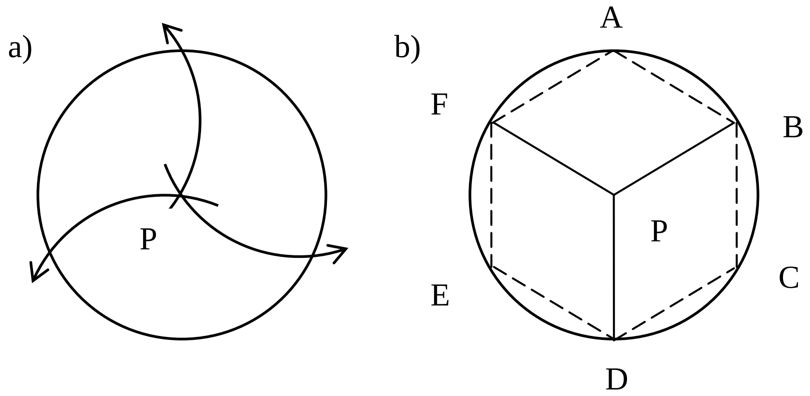
Gambar 2a) dan 2b). Sebuah lingkaran dengan jari-jari r dibagi menjadi dua bagian yang sama luasnya oleh busur lingkaran dengan jari-jari r dan ½ r.

Pada gambar 2a), lingkaran dipotong oleh dua buah busur lingkaran dengan jari-jari yang sama yaitu r. Pusat lingkaran pertama di C yang merupakan perpotongan sumbu AP dengan busur lingkaran di sebelah kiri. Pusat lingkaran ke dua di D yang merupakan perpotongan sumbu BP dengan busur lingkaran di sebelah kanan. Pada gambar 2b), lingkaran dibagi dua oleh busur lingkaran dengan jari-jari ½ r.

Bagilah garis tengah EF menjadi empat bagian yang sama yaitu EG = GP = PH = HF = ½ r. Titik G terletak pada sumbu PE dan titik H terletak pada sumbu PF. Pusat lingkaran pertama terletak di titik G dan pusat lingkaran kedua terletak di titik H.

Cara melukis gambar 1 dan 2 mempergunakan konstruksi geometris seperti membuat sumbu simetri, sifat segi enam beraturan dan sebagainya. (Barnett, 2009)

Cara untuk membagi sebuah lingkaran menjadi tiga bagian yang sama luasnya adalah menggunakan busur lingkaran seperti pada gambar 3a) dan 3b).



Gambar 3a). Sebuah lingkaran dengan jari-jari r dibagi menjadi tiga bagian yang sama luasnya oleh busur lingkaran dengan jari-jari r.
Gambar 3b). Segi enam beraturan ABCDEF dalam lingkaran untuk menentukan pusat lingkaran pada gambar 3a).

Pada gambar 3a), pusat busur lingkaran pertama adalah di titik F, busur lingkaran kedua di titik B dan busur lingkaran ketiga dititik D dengan jari-jari r dan sudut pusat 60^0.

PEMBAHASAN

Sebuah lingkaran dapat dipotong menjadi beberapa bagian yang sama luasnya dengan menggunakan dua buah cara, yaitu :

1. Geometri.
2. Trigonometri dan Invers fungsi trigonometri.

Penyelesaian cara kedua dapat dibagi lagi menjadi tiga, yaitu :

a. Lingkaran dipotong garis lurus dan terbentuk **tembereng** lingkaran.
b. Lingkaran dipotong lingkaran lain dengan jari-jari r yang sama.
c. Lingkaran dipotong lingkaran lain dengan jari-jari R yang berbeda dan pusatnya terletak pada tepi busur lingkaran semula.

Cara geometri merupakan hasil pemikiran penulis sendiri. Cara 2a, 2b, dan 2c diperoleh dari soal pada buku Valberg dan penyelesaian cara 2b dan 2c adalah hasil pemikiran penulis sendiri.

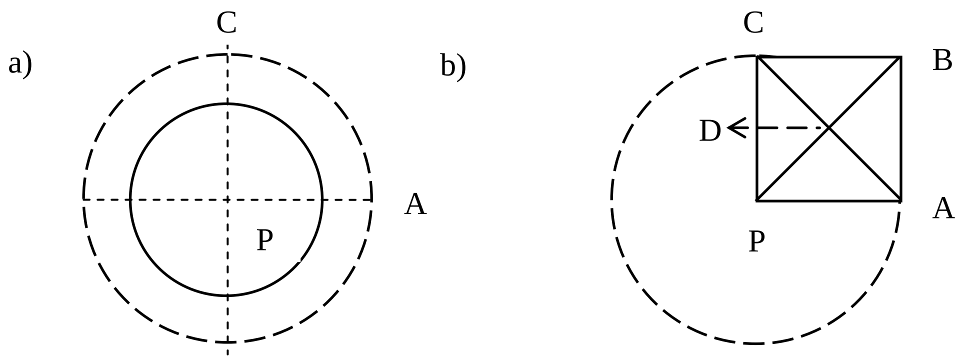
Dengan cara geometri, dipergunakan dasar-dasar **konstruksi geometri** dan lebih mudah mengerjakannya dengan bantuan jangka dan penggaris. Keakuratan dan ketelitian gambar yang diperoleh bergantung pada yang membuatnya. Dengan cara trigonometri dan invers fungsi trigonometri, akan diperoleh **persamaan transendental** yang dapat dihitung **secara numerik** dengan bantuan komputer cara ini lebih sulit mengerjakannya.

Harga pendekatan sudut pusat yang diperoleh dapat ditentukan dengan busur derajat.

1. Geometri

Dalam kehidupan sehari-hari, sering dijumpai sasaran anak panah atau peluru dalam perlombaan memanah atau menembak. Target sasaran berbentuk lingkaran-lingkaran yang konsentris (pusatnya sama). Aplikasi dalam bidang fisika adalah dalam pembuatan resistor atau untuk konduksi panas. Yang akan dibahas di sini adalah cara membagi sebuah lingkaran menjadi dua bagian dan tiga bagian yang sama luasnya dengan lingkaran yang konsentris.

Contoh 1 : Dari gambar 4 di bawah ini, sebuah lingkaran dengan jari-jari r akan dibagi menjadi dua bagian dengan luas yang sama secara konsentris sehingga akan diperoleh jari-jari lingkaran kecil = ½ r√2.



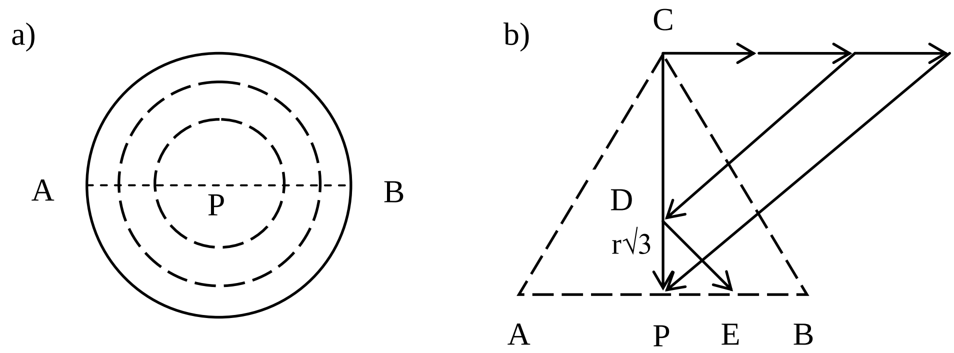
Gambar 4a). Sebuah lingkaran dibagi menjadi dua bagian secara konsentris.
4b). Lukisan PD = ½ r√2.

Cara untuk memperoleh PD = r kecil = ½ r√2 adalah sebagai berikut.
Pada persegí PABC ditarik diagonal PB dan AC yang berpotongan di titik D.
Panjang PB = r√2 dan PD = BD = ½ PB = **½ r√2.**

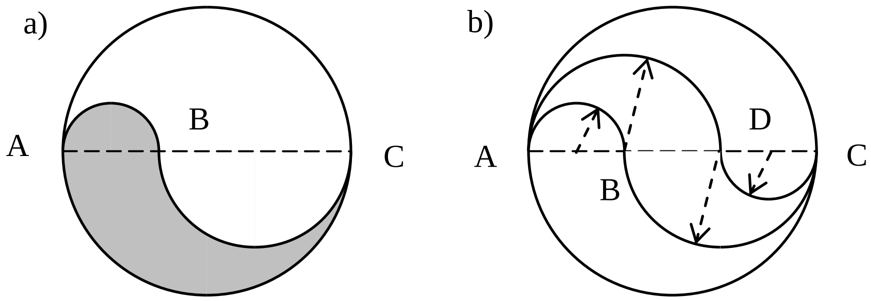
Contoh 2 : Dari gambar 5 di bawah ini, sebuah lingkaran dengan jari-jari r akan dibagi menjadi tiga bagian dengan luas yang sama secara konsentris sehingga akan diperoleh jari-jari lingkaran kecil = 1/3 r√3 dan jari-jari lingkaran sedang = 1/3 r√6. Pada gambar 5b), segitiga ABC adalah segitiga sama sisi dengan AB = BC = AC = 2r, AP = BP = r (P terletak pada sumbu AB) sehingga akan diperoleh panjang PC = r√3.

Garis PC dibagi menjadi tiga bagian yang sama dengan konstruksi geometris dan diperoleh panjang garis

PD = 1/3 r$\sqrt{3}$. Pada garis PB, ukurkan PE = PD dan diperoleh segitiga siku-siku sama kaki PDE dan panjang garis **DE = 1/3 r$\sqrt{6}$**.



Gambar 5a). Sebuah lingkaran dibagi menjadi dua bagian secara konsentris.
5b). Lukisan PD = 1/3 r$\sqrt{3}$ dan DE = 1/3 r$\sqrt{6}$.



Gambar 6a). BC = 2 AB, luas bagian yang diarsir adalah 1/3 dari luas lingkaran.
6b). Sebuah lingkaran dibagi menjadi tiga bagian yang sama dengan menggunakan empat buah setengah lingkaran.

Ide pada gambar 6a) diperoleh penulis dari buku (Hoffer and Koss, 1996). Diameter BC = 2 AB dan setelah dihitung, akan diperoleh luas bagian yang diarsir adalah 1/3 dari luas lingkaran. Ide ini dikembangkan oleh penulis sehingga diperoleh gambar 6b), yaitu lingkaran yang dibagi tiga dengan luas yang sama.

Pada gambar 6b), diameter lingkaran AC dibagi menjadi tiga bagian yang sama, yaitu AB = BD = CD = 2 r/3. Pada titik B dan D, dilukis setengah lingkaran dengan jari-jari 2 r/3 dan dengan AB dan CD sebagai diameter dilukis setengah lingkaran lain dengan jari-jari 1/3 r.

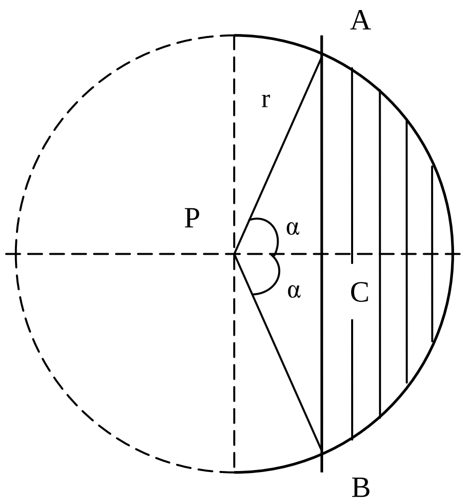
2. Trigonometri dan Invers fungsi trigonometri.

Penyelesaian cara kedua dapat dibagi lagi menjadi tiga, yaitu :

- **a.** Lingkaran dipotong garis lurus dan terbentuk **tembereng** lingkaran.
- **b.** Lingkaran dipotong lingkaran lain dengan jari-jari r yang sama.

c. Lingkaran dipotong lingkaran lain dengan jari-jari R yang berbeda dan pusatnya terletak pada tepi busur lingkaran semula.

Dari gambar 7 di bawah ini, dapat dilihat bahwa sebuah lingkaran dengan jari-jari r dipotong oleh garis lurus (tali busur) AB dan terbentuk tembereng lingkaran AB (bagian yang diarsir). Luas tembereng AB dengan sudut pusat 2α adalah **½r²(2α–sin2α) ......(1)**



Gambar 7. Tembereng lingkaran dengan sudut pusat 2α.

Contoh :

1. Luas tembereng = ½ r^2(2α – sin2α) = 1/6 luas lingkaran = 1/6 π r^2
   Diperoleh persamaan transendental **2α – sin2α = π/3** dan sudut α = 0,984484 radian = $56,407^0$
   Jadi, jarak tembereng dari pusat P adalah PC = d = r cosα = 0,553292 r
2. Luas tembereng = ½ r^2(2α – sin2α) = 1/4 luas lingkaran = 1/4 π r^2
   Diperoleh persamaan transendental **2α – sin2α = π/2** dan sudut α = 1,15494 radian = $66,173^0$
   Jadi, jarak tembereng dari pusat P adalah PC = d = r cosα = 0,403973 r
3. Luas tembereng = ½ r^2(2α – sin2α) = 1/3 luas lingkaran = 1/3 π r^2
   Diperoleh persamaan transendental **2α – sin2α = 2π/3** dan sudut α = 1,30266 radian = $74,637^0$
   Jadi, jarak tembereng dari pusat P adalah PC = d = r cosα = 0,264934 r

Luas setengah tembereng dapat dihitung dengan integral (Valberg, 2007), yaitu

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + c$$

Contoh a.2 : Menghitung setengah tembereng yang luasnya = 1/8 lingkaran.

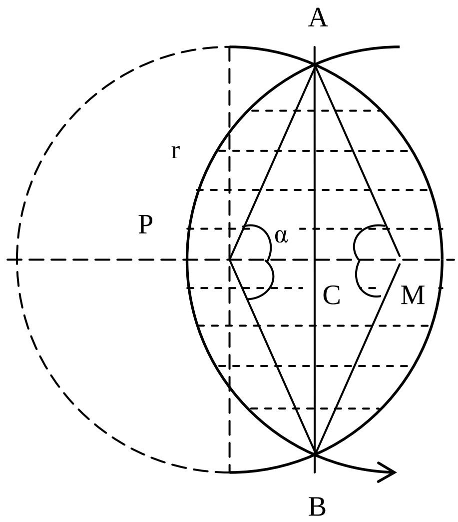
$$\int_0^{0,4r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left(\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2}\right)\Big]_0^{0,4r} = 0,3891 r^2$$

(0,3891 r^2 mendekati π/8 r^2 = 0,3927 r^2, dengan kesalahan – 0,92 %)

Tabel 1. Perhitungan luas tembereng lingkaran.

Sudut α (^{0}) pembulatan	α (radian)	Luas tembereng $A = \frac{1}{2} r^2(2\alpha - \sin 2\alpha)$	Luas sebenarnya	Kesalahan (%)
56,5	0,986	$0,5257\ r^2$	$1/6\ \pi\ r^2 = 0,5236\ r^2$	+ 0,40
66	1,152	$0,7800\ r^2$	$1/4\ \pi\ r^2 = 0,7854\ r^2$	– 0,69
74,5	1,300	$1,0422\ r^2$	$1/3\ \pi\ r^2 = 1,0472\ r^2$	– 0,48

Dari gambar 8 di bawah ini dapat dilihat bahwa sebuah lingkaran dengan jari-jari r dipotong oleh lingkaran lain dengan jari-jari r yang sama. Irisannya berbentuk dua buah tembereng yang simetris. (Valberg, 2007)



Gambar 8. Dua buah tembereng lingkaran yang simetris dengan sudut pusat 2α.

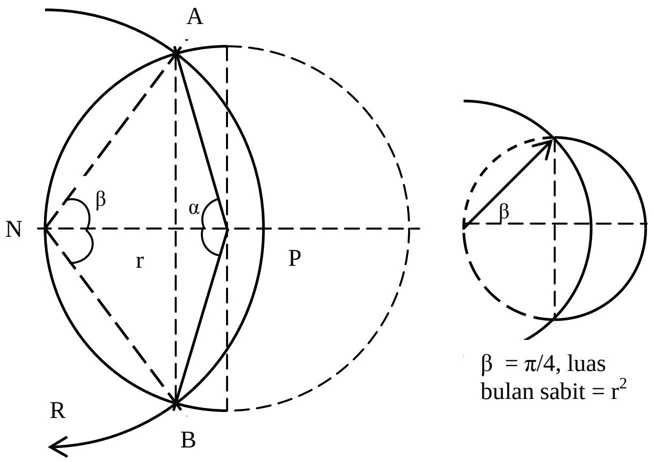
Luas yang diarsir = 2 x luas tembereng AB dengan sudut pusat 2α = $\mathbf{r^2(2\alpha - \sin 2\alpha)}$ dan PC = d = r cosα = CM dan diperoleh PM = 2 d = 2 r cosα.

Pusat M dapat ditentukan dan tembereng sebelah kiri dapat digambar atau cosα = d/r dan α = arc cos(d/r)

Luas yang diarsir = $\mathbf{r^2(2\ \text{arc}\ \cos(d/r) - \sin(2\ \text{arc}\ \cos(d/r))}$ **................(2)**

Contoh : luas yang diarsir = $r^2(2\ \text{arc}\ \cos(d/r) - \sin(2\ \text{arc}\ \cos(d/r)) = \frac{1}{2}\pi r^2$ **2 arc cosx – sin(2 arc cosx) = π/2** dan diperoleh x = d/r = 0,403972 atau d = 0,403972 r (cocok dengan perhitungan a.2)

Dari gambar 9 di bawah ini, dapat dilihat bahwa sebuah lingkaran dengan jari-jari r dipotong oleh lingkaran lain dengan jari-jari R yang berbeda dan pusatnya terletak pada tepi busur lingkaran semula. Irisannya berbentuk dua buah tembereng yang tidak simetris. (Valberg, 2007)



Gambar 9 kiri. Dua buah tembereng lingkaran yang tidak simetris dengan sudut pusat 2α dan 2β. Gambar 9 kanan, untuk kasus khusus di mana β = π/4.

Luas = luas tembereng kiri dengan sudut pusat 2α dan jari-jari r + luas tembereng kanan dengan sudut pusat 2β dan jari-jari R

$= \frac{1}{2} r^2(2\alpha - \sin 2\alpha) + \frac{1}{2}R^2(2\beta - \sin 2\beta)$

Setelah disederhanakan, menurut penulis akan diperoleh Luas = $\pi r^2 - r^2 \sin\alpha - \pi r^2 \cos\alpha + r^2 \alpha \cos\alpha$ …….(3a)

dengan $\alpha + 2\beta = \pi$ dan $R = 2 r \sin\frac{1}{2} \alpha$ atau dalam bentuk lain (Valberg, 2007), akan diperoleh Luas = $R^2 \arccos\left(\frac{R}{2r}\right) + 2r^2 \arcsin\left(\frac{R}{2r}\right) - \frac{1}{2}R^2\sqrt{(\frac{2r}{R})^2 - 1}$ ...(3b)

dengan $R = 2 r \sin\frac{1}{2} \alpha = 2 r \cos\beta$. Khusus untuk sudut $\beta = \pi/4$, $\alpha = \pi/2$ dan $R = r\sqrt{2}$, luas tembereng = $\pi r^2 - r^2$ dan sisanya yang berbentuk **bulan sabit** mempunyai luas $\mathbf{r^2}$ (bentuk **persegi**).

Soal ini sudah dihitung oleh **Hipócrates of Chios pada 430 BC** (Valberg hal 403)

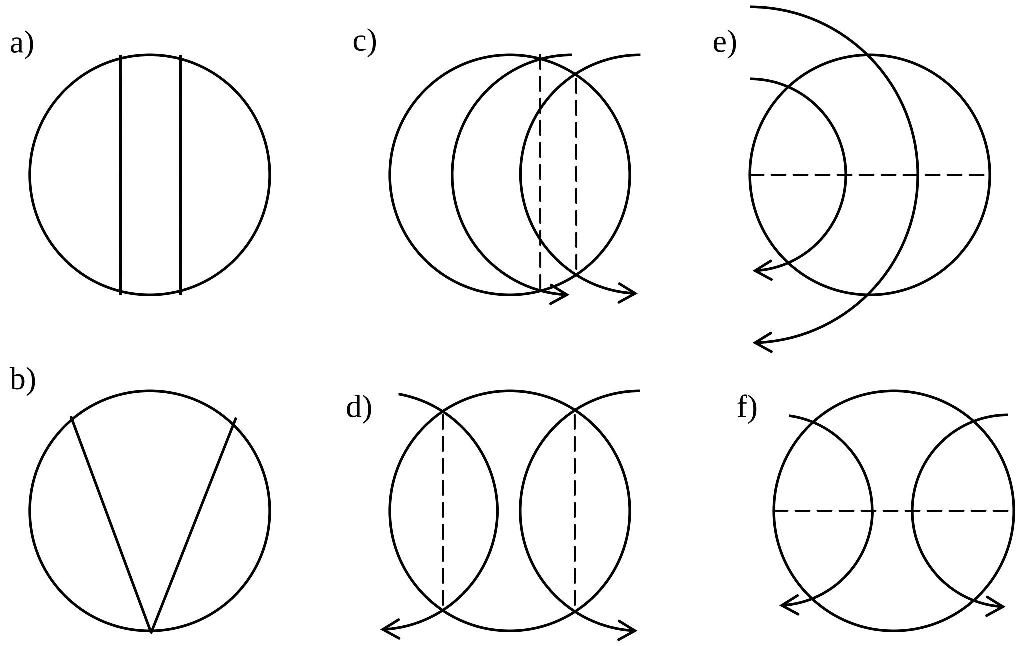
Contoh :

1. Luas = $\pi r^2 - r^2 \sin\alpha - \pi r^2 \cos\alpha + r^2 \alpha \cos\alpha = 1/3\ \pi r^2$ atau $2\pi/3 - \sin\alpha - \pi \cos\alpha + \alpha \cos\alpha = 0$ diperoleh α = 0,946538 radian = $54{,}23^0$ dan jari-jari $R = 2 r \sin\frac{1}{2} \alpha$ = 0,911596 r
2. Luas = $\pi r^2 - r^2 \sin\alpha - \pi r^2 \cos\alpha + r^2 \alpha \cos\alpha = 1/2\ \pi r^2$ atau $\pi/2 - \sin\alpha - \pi \cos\alpha + \alpha \cos\alpha = 0$
   diperoleh α = 1,23589 radian = $70{,}81^0$ dan jari-jari $R = 2 r \sin\frac{1}{2} \alpha$ = 1,15872 r
3. Luas = $\pi r^2 - r^2 \sin\alpha - \pi r^2 \cos\alpha + r^2 \alpha \cos\alpha = 2/3\ \pi r^2$ atau $\pi/3 - \sin\alpha - \pi \cos\alpha + \alpha \cos\alpha = 0$
   diperoleh α = 1,541 radian = $88{,}29^0$
   dan jari-jari $R = 2 r \sin\frac{1}{2} \alpha$ = 1,3929 r
4. Luas = $R^2 \arccos\left(\frac{R}{2r}\right) + 2 r^2 \arcsin\left(\frac{R}{2r}\right) - \frac{1}{2}R^2\sqrt{(\frac{2r}{R})^2 - 1} = 2/3\ \pi r^2$
   diperoleh persamaan $2 \arcsin x + 4 x^2 \arccos x - 2 x^2 \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)} - 2\pi/3 = 0$

   dengan x = R/2r = 0,6965 dan R = 1,3930 r (cocok dengan perhitungan c.3)

Tabel 2. Perhitungan luas dua buah tembereng lingkaran.

Sudut α (^{0}) pembulatan	α (radian)	Luas tembereng $A = \pi r^2 - r^2 \sin\alpha - \pi r^2 \cos\alpha + r^2 \alpha \cos\alpha$	Luas sebenarnya	Kesalahan (%)
54	0,942	1,0391 r^2	1/3 πr^2 = 1,0472 r^2	– 0,77
71	1,239	1,5764 r^2	1/2 πr^2 = 1,5710 r^2	+ 0,34
88	1,536	2,0863 r^2	2/3 πr^2 = 2,0944 r^2	– 0,39



Gambar 10. Sebuah lingkaran dipotong menjadi tiga bagian yang sama luasnya.

Pada gambar a) dan b), dipergunakan cara 2a. Pada gambar c) dan d), dipergunakan cara 2b; pada gambar c) luas tembereng yang di tengah adalah 2/3 luas lingkaran, dan pada gambar d) bentuknya simetris. Pada gambar e) dan f), dipergunakan cara 2c; pada gambar e) luas tembereng yang di tengah adalah 2/3 luas lingkaran dan pada gambar f) bentuknya simetris.

Jadi, sebuah lingkaran dapat dibagi menjadi tiga bagian yang sama luasnya dengan cara trigonometri sehingga diperoleh bentuk irisan yang berbeda-beda dan lebih menarik jika dibandingkan dengan cara geometri.

Catatan : Hasil perhitungan dengan komputer menggunakan cara a, b dan c, yaitu rumus (1), (2), (3a) dan (3b) adalah sama. Rumus (1) dan (3a) berisi persamaan **trigonometri**, sedangkan rumus (2) dan (3b) berisi persamaan **invers fungsi trigonometri.** Cara a lebih mudah jika dibandingkan dengan cara b dan cara c.

SIMPULAN

Sebuah lingkaran dapat dipotong menjadi beberapa bagian yang sama luasnya dengan membagi sudut pusatnya dengan busur derajat. Irisannya berbentuk juring atau sektor. Cara lain dikerjakan dengan **geometri** atau **trigonometri dan invers fungsi trigonometri**. Cara geometri memerlukan pemahaman tentang **kontruksi geometri** dan peralatannya. Cara trigonometri dan invers fungsi trigonometri memerlukan penyelesaian **persamaan transendental** yang dapat dihitung secara numerik dengan bantuan komputer. Sudut pusat yang diperoleh dibulatkan dalam satuan derajat dan luas irisan lingkaran yang diperoleh kesalahannya lebih kecil dari 1 %. Bentuk irisan cara trigonometri dan inversnya lebih menarik dibandingkan dengan cara geometri.

SARAN

Dalam pembahasan di atas, sebuah lingkaran dibagi menjadi dua atau tiga bagian yang sama luasnya dan cara ini dapat diperluas menjadi empat, lima atau enam bagian dan seterusnya. Aplikasi dalam bidang Física biasanya mempergunakan lingkaran yang dibagi secara konsentris untuk konduksi panas atau resistor.

DAFTAR PUSTAKA

Barnett Rich and Christopher Thomas. 2009. Schaum's outlines of *Geometry*, 4 th Edition. Mc Graw Hill. Chapter 15. Construction.

Hoffer and Koss. 1996. *Focus on Geometry*, Teacher's Edition. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Hlm. 581.

Martono Wiwip. 2000. *Diktat Geometri untuk Politeknik*. Bandung : Politeknik Negeri Bandung.

Varberg, Purcell and Rigdon. 2007. *Calculus*, 9 th Edition. Pearson Education, Inc. Hlm. 373 dan 403.