MENENTUKAN DERET FOURIER FUNGSI DENGAN PERIODE SEMBARANG TANPA INTEGRAL

Hedi
Staf Pengajar Ilmu Pengetahuan Dasar
Unit Pelayanan Mata Kuliah Umum
Politeknik Negeri Bandung

Abstrak

Persamaan diferensial takhomogen yang memiliki input fungsi bukan sinus atau cosinus, tetapi bersifat periodik, tidak dapat diselesaikan hanya melihat input fungsi pada suatu interval tertentu.Fungsi tersebut umumnya dinyatakan dalam bentuk deret fungsi dengan suku-suku berbentuk sinus, dan cosinus yang dinamakan deret Fourier. Deret tersebut umumnya ditentukan melalui pengintegralan dan masalah yang paling rumit apabila fungsinya berbentuk polinom berderajat lebih dari dua. Dengan menerapkan sifat-sifat turunan fungsi polinom, kekontinuan fungsi, integral parsial, dan integral tentu ; deret fourier untuk fungsi ini dapat dirumuskan ke bentuk rumus koefisien fourier tanpa integral .

Kata kunci : Deret Fourier, Tanpa Integral

Abstract

Non-homogenous differential eqution problem, whose function input is not sine or cosine but periodic cannot be solved on an interval way. The periodic function is generally expressed the form of function series in terms of cosine and sine functions. These series are called Fourier series, and generally are determined by integral formulas. If the periodic function is in the form of polynomial function degree more than two , it will couse a very complicated problem in determining Fourier series. It can be determined without integral by applying properties of derivative polynomial function, term-by-term integration, and definite integral.

Keywords : Fourier Series, Without Integral

Pendahuluan

Deret fourier sering diterapkan dalam bidang rekayasa, sebagai contoh dalam ilmu listrik, untuk menganalisa *"steady state respons"* rangkaian terhadap masukan yang berbentuk fungsi periodik. Cara yang digunakan adalah menyatakan fungsi periodik tersebut dalam bentuk deret sinusoidal.

Umumnya metode yang digunakan untuk menentukan koefisien fourier adalah metode Euler. Kemudian metode ini dikembangkan dengan penerapan fungsi ganjil dan genap, selanjutnya metode pengembangan setengah daerah [4] dengan metode ini koefisien fourier tidak harus semuanya dicari. Akan tetapi apabila fungsi periodiknya berbentuk polinom derajat lebih dari dua , penggunaan metode Euler dan pengembangannya, tetap harus melakukan proses integral yang rumit. Oleh karena itu perlu rumusan, untuk menentukan metode yang lebih singkat.

Fungsi periodik yang berbentuk polinom dengan perioda 2π, dapat dinyatakan dalam deret fourier dengan koefisien fourier berbentuk penjumlahan fungsi[5] . Berdasarkan gagasan ini akan dilakukan perumusan koefisien Fourier dengan perioda sembarang. Tujuan berikutnya, membuat langkah-langkah menentukan koefisien fourier, sehingga metode ini akan mudah diterapkan. Selanjutnya rumusan koefisien fourier fungsi dengan perioda sembarang dan langkah - langkahnya akan dipaparkan dalam metode berikut :

Metode

Apabila f(x) yang didefinisikan pada interval (-L , L)

- Kontinu bagian demi bagian pada interval tersebut
- Integrable pada interval tersebut
- Berperiodik dengan Periode 2L

f(x) dapat dinyatakan dalam deret sebagai berikut

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right) \quad (1)$$

Deret semacam ini dinamakan deret fourier, Koefisien $\mathbf{a_0}$, $\mathbf{a_n}$, dan $\mathbf{b_n}$ ditentukan dengan menerapkan rumus Euler [2] sebagai berikut :

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx \quad (2)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad (3)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad (4)$$

apabila f(x) fungsi ganjil , $\mathbf{a_0} = \mathbf{a_n} = 0$, jadi yang ditentukan hanya $\mathbf{b_n}$, sedang- kan jika f(x) fungsi genap, $\mathbf{b_n} = 0$, jadi yang ditentukan $\mathbf{a_0}$ dan $\mathbf{a_n}$.

Penentuan $\mathbf{a_0}$ dilakukan hanya dengan integral biasa, sedangkan $\mathbf{a_n}$ dan $\mathbf{b_n}$ diturunkan dengan batasan f(x) yang didefinisikan berbentuk sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{bila } -L = x_0 < x < x_1 \\ g_2(x) & \text{bila } x_1 < x < x_2 \\ g_3(x) & \text{bila } x_2 < x < x_3 \\ & \bullet \\ & \bullet \\ g_m(x) & \text{bila } x_{m-1} < x < x_m = L \end{cases} \quad (5)$$

dimana $g_j(x)$ polinom untuk j = 1, 2, 3, …,m

$\mathbf{a_n}$ dan $\mathbf{b_n}$ untuk fungsi ini adalah

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad (6)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad (7)$$

Ada dua teorema yang digunakan untuk merumuskan $\mathbf{a_n}$ dan $\mathbf{b_n}$ yaitu

Teorema 1. Integral parsial

Jika f(x) dan g(x) fungsi yang dapat di diferensialkan, maka

$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ [1]

Teorema 2. Integral tentu

Jika f(x) kontinu pada interval [a , b] dan g(x) fungsi sedemikian sehingga g'(x) = f(x), maka

$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$ [1]

Jika f(x) tak kontinu di x = b, g(b)=g(b-) = $\lim_{h\to 0-} g(b+h)$ dan jika f(x) tak kontinu di x = a maka nilai g(a) = g(a+) = $\lim_{h\to 0+} g(b+h)$.

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx = L\left(\frac{f(x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\right|_{x_{j-1}}^{x_j} - \frac{L}{n\pi}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

disubstitusikan pada persamaan 6 untuk mendapatkan

$$a_n = \sum_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{f(x)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x\right|_{x_{j-1}}^{x_j} - \frac{1}{n\pi}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\right) \quad (8)$$

karena f(x) tidak selalu kontinu di titik x_j , j = 0, 1, 2, 3, ... n, dari teorema 2 persamaan terakhir menjadi,

$$a_n = \sum_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{f(x_{j-})}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x_j\right) - \left(\frac{f(x_{j-1+})}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x_j\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{n\pi}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\right)$$

$$-\frac{f(x_0+)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x_0 + \frac{f(x_2-)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x_2$$

$$-\frac{f(x_1+)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x_1+\frac{f(x_3-)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x_3$$
$$-\frac{f(x_2+)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x_2\ldots$$
$$+\frac{f(x_m-)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x_m-\frac{f(x_{m-1}+)}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{L}x_m$$
$$-\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{1}{n\pi}\int_{x_{j-1}}^{x_j}f'(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx\Big)$$

Karena perioda f(x) dan $\sin\frac{n\pi}{L}x$ adalah 2L, maka $f(x_0+)=f(x_m+)$ dan $\sin\frac{n\pi}{L}x_0=\sin\frac{n\pi}{L}x_m$, sehingga

$$a_n=\frac{1}{n\pi}\Bigg(\big(f(x_1-)-f(x_1+)\big)\frac{\sin n\pi}{L}x_1+$$
$$\big(f(x_2-)-f(x_2+)\big)\frac{\sin n\pi}{L}x_2$$
$$+\big(f(x_3-)-f(x_3+)\big)\frac{\sin n\pi}{L}x_3+\ldots+$$
$$\big(f(x_m-)-f(x_m+)\big)\frac{\sin n\pi}{L}x_m\Bigg)$$
$$-\sum_{j=1}^{m}\Big(\frac{1}{n\pi}\int_{x_{j-1}}^{x_j}f'(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx\Big)$$

Dengan menuliskan $f_j=f(x_j+)-f(x_j-)$,
Maka bentuk diatas dapat dinyatakan sebagai :

$$a_n=-\frac{1}{n\pi}\sum_{j=1}^{m}\Big(f_j\sin\frac{n\pi}{L}x_j\Big)-\frac{1}{n\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j}f'(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx) \quad (9)$$

Apabila integral pada persamaan 9 diparsialkan lagi, akan didapat

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j}f'(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx=-\frac{L}{n\pi}\sum_{j=1}^{m}\Big(f'_j\cos\frac{n\pi}{L}x_j\Big)$$
$$+\frac{L}{n\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j}f''(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx \quad (10)$$

dimana $f'_j=f'(x_j+)-f'(x_j-)$

Selanjutnya parsialkan lagi persamaan 10, sehingga.

$$\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j}f''(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx=\frac{L}{n\pi}\sum_{j=1}^{m}\Big(f''_j\cos\frac{n\pi}{L}x_j\Big)$$
$$-\frac{L}{n\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j}f'''(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx$$

dimana $f''_j=f''(x_j+)-f''(x_j-)$

Mengingat pola hasil integral parsial sudah terlihat, persamaan terakhir tidak perlu diparsialkan lagi. Dengan demi- kian a_n akan berbentuk penjumlahan sebagai berikut,

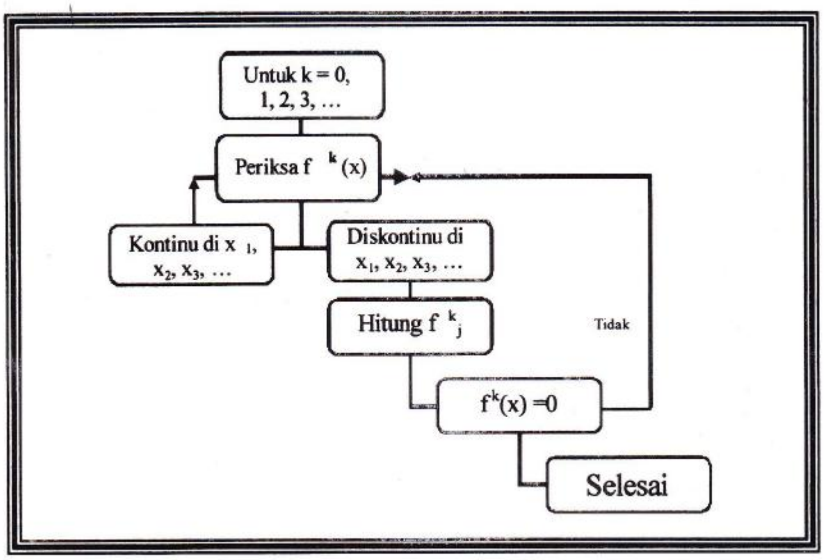
$$a_n=\frac{1}{n\pi}\Bigg(-\sum_{j=1}^{m}f_j\sin\frac{n\pi}{L}x_j-\frac{L}{n\pi}\sum_{j=1}^{m}f'_j\cos\frac{n\pi}{L}x_j$$
$$+\Big(\frac{L}{n\pi}\Big)^2\sum_{j=1}^{m}f''_j\sin\frac{n\pi}{L}x_j$$
$$+\Big(\frac{L}{n\pi}\Big)^3\sum_{j=1}^{m}f'''_j\cos\frac{n\pi}{L}x_j--++\ldots\Bigg) \quad ..(11)$$

Dengan cara yang sama seperti di atas untuk koefisien b_n dapat dirumuskan,

$$b_n=\frac{1}{n\pi}\Bigg(\sum_{j=1}^{m}f_j\cos\frac{n\pi}{L}x_j-\frac{L}{n\pi}\sum_{j=1}^{m}f'_j\sin\frac{n\pi}{L}x_j$$
$$-\Big(\frac{L}{n\pi}\Big)^2\sum_{j=1}^{m}f''_j\cos\frac{n\pi}{L}x_j$$
$$+\Big(\frac{L}{n\pi}\Big)^3\sum_{j=1}^{m}f'''_j\sin\frac{n\pi}{L}x_j--++--\ldots\Bigg) \quad 12$$

Dengan rumus persamaan 11, dan 12.

Penentuan koefisien fourier tidak perlu dilakukan melalui proses integral ; cukup dengan mensubstitusikan perioda , dan harga f_j, f'_j, f''_j ... (j = 1 , 2, 3, ...m), yang ditentukan sebagai berikut:
Apabila f(x) kontinu di x_1, x_2, x_3, ... , maka f_j = 0. Jika f(x) tidak kontinu hitung dulu f_j.
Selanjutnya jika turunan ke k, $f^k(x)$ kontinu, k = 1, 2, 3, ... , maka $f^k_j=0$. Jika $f^k(x)$ tidak kontinu hitung dulu nilai f^k_j .Dengan mendefinisikan $f^0(x)=f(x)$, nilai f^k_j dapat dijelaskan dengan diagram berikut :

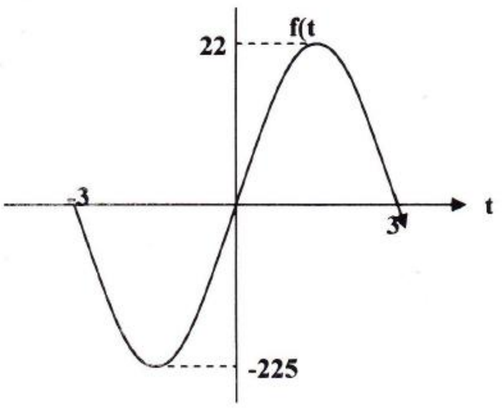


Contoh Aplikasi

Tegangan dengan persamaan

$$f(t) = \begin{cases} 100(3t + t^2)\ \text{jika} & -3 \langle t \langle 0 \\ 100(3t - t^2)\ \text{Jika} & 0 \langle t \langle 3 \end{cases}$$

berperiodik dengan perioda 6, dipasang pada rangkaian resistor, induktor dan kapasitor. Untuk menentukan arus *steady-state* dalam rangkaian tersebut, f(t) dinyatakan terlebih dahulu dalam bentuk deret fourier, yang uraiannya diberikan berikut ini



Gambar 1

karena f(t)
kontinu di $t_1 = 0$ dan di $t_2 = 3$, maka $f_1 = f_2 = 0$

selanjutnya dengan menurunkan f(t)

didapat: $$f'(t) = \begin{cases} 100(3 + 2t)\ \text{jika} & -3 \langle t \langle 0 \\ 100(3 - 2t)\ \text{Jika} & 0 \langle t \langle 3 \end{cases}$$

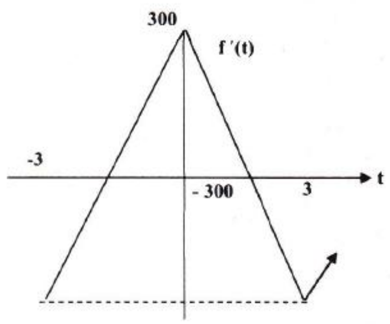
dan f'(t) kontinu di $t_1 = 0$ dan di $t_2 = 3$,
sedang $f'_1 = f'_2 = 0$ (Gambar 2)
turunan kedua dari f(t) adalah :

$$f''(t) = \begin{cases} 200 & \text{jika} \quad -3 \langle t \langle 0 \\ -200 & \text{Jika} \quad 0 \langle t \langle 3 \end{cases} \qquad \text{(Gambar 3)}$$

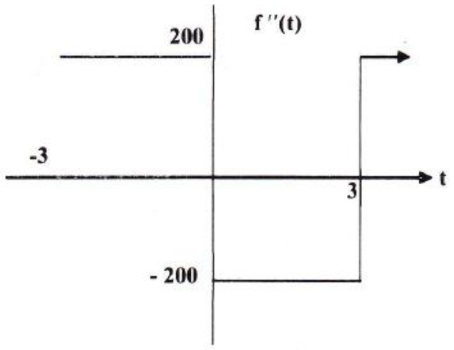
f''(t) diskontinu di $t_1 = 0$ dan di $t_2 = 3$, maka

$f''_1 = -200 - 200 = -400$

$f''_2 = 200 - (-200) = 400$



Gambar 2



Gambar 3

Karena $\mathbf{f''(t)}$ konstan, $\mathbf{f'''(t)} = 0$, dengan demikian koefisien $\mathbf{b_n}$ dapat dihitung sebagai

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\left(\frac{3}{n\pi}\right)^2 (f''_1 \cos(\frac{n\pi}{6}x_1) + f''_2 \cos(\frac{n\pi}{6}x_2))$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(\frac{3}{n\pi}\right)^2 (-400\cos(\frac{n\pi}{3}0) + 400\cos(\frac{n\pi}{3}3)$$

$$= \frac{3600}{(n\pi)^3}(1-\cos(n\pi)) =$$

$$\begin{cases} \dfrac{7200}{(n\pi)^3} & \text{jika} \quad n : \text{ganjil} \\ 0 & \text{jika} \quad n : \text{genap} \end{cases}$$

Deret fourier fungsi tegangan tersebut dinyatakan dengan

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7200}{(n\pi)^3}\sin(\frac{n\pi}{3}x) \text{ dengan n : ganjil}$$

Selanjutnya dengan metoda Euler, deret tersebut diselesaikan sebagai berikut.

Karena f(t) merupakan fungsi ganjil maka f(t) berbentuk deret fourier sinus. Dengan demikian, untuk deret itu, cukup ditentu- kan koefisien $\mathbf{b_n}$. Dengan substitusi perioda L = 3, dan f(t) pada persamaan 4, akan diperoleh :

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(t)\sin\frac{n\pi}{L}tdt = \frac{2}{3}\int_0^3 100(3t-t^2)\sin\frac{n\pi}{3}tdt$$

Selanjutnya kita terapkan teorema 1, dan integral parsialkan dua kali pada persamaan tadi, maka didapat. =

$$\frac{2}{3}\int_0^3 100(3t-t^2)\sin\frac{n\pi}{3}tdt$$

$$\frac{200\left((n\pi)^2 t(t-3) - 18\right)\cos\frac{n\pi}{3}t}{(n\pi)^3} + \left.\frac{600(3-2t)\sin\frac{n\pi}{3}t}{(n\pi)^2}\right|_0^3 \qquad (13)$$

$$= -\frac{3600\cos n\pi}{(n\pi)^3} - \frac{1800\sin(n\pi)}{(n\pi)^2} + \frac{3600}{(n\pi)^3},$$

Karena $\frac{1800\sin(n\pi)}{(n\pi)^2} = 0$ untuk setiap n,

maka $b_n = \frac{3600}{(n\pi)^3}(1-\cos(n\pi))$

Hasil ini sama dengan hasil perhitungan dengan metoda tanpa integral , namun untuk mendapatkan persamaan 13 tidak mudah untuk dikerjakan apalagi jika pangkat dari f(t) lebih dari dua.

Kesimpulan

- ❖ Penentuan koefisien fourier dengan metode tanpa integral, cukup dilakukan dengan substitusi fungsi dan turunan-turunannya disekitar titik diskontinuitas nya. Jelas lebih singkat jika dibandingkan dengan metoda Euler sebab Proses penurunan lebih mudah dilakukan daripada integral dan hasilnya lebih teliti .
- ❖ Dalam penentuan koefisien fourier lebih mudah perlakuannya apabila fungsi dan turunan-turunannya dibuat dalam bentuk grafik, karena harga f_j , f'_j , f''_j dan seterusnya terlihat dalam grafik.

Daftar Pustaka

[1] G.Bartle Robert, Sherbert Donald R. 1982. *Introduction to Real Analysis*. New York : John Wiley & Sons, Inc.

[2] Hedi. 2003. *Matematika terapan II untuk Jurusan Teknik Mesin*. Penerbit Politeknik Negeri Bandung

[3] Kreyszig, Erwin. 1993a. *Advanced Engineering Mathematics* , Ed. ke-7, New York: John Wiley & Sons, Inc.

[4] Washington. J, Allyn. 1985. *Basic Technical Mathematics with Calculus*, Ed. ke-4. California : the Benjamin / Cummings Publishing Company, Inc.

[5] ….., 1993b. *Matematika Teknik Lanjutan*, Ed. ke-6, Jilid 2. Alih Bahasa Bambang Sumantri, Jakarta : Penerbit PT Gramedia Pustaka