

OPTIMASI PENYELESAIAN MASALAH RANGKAIAN RESISTOR SEDERHANA UNTUK MENENTUKAN TRANSFER DAYA MAKSIMUM

OPTIMIZATION OF PROBLEM SOLVING ON A SIMPLE RESISTOR CIRCUIT TO FIND A MAXIMUM POWER TRANSFER

Wiwip Martono

(Staf Pengajar UP MKU Politeknik Negeri Bandung)

ABSTRAK.

Model matematika dari nilai resistansi beban R yang sesuai yang menyebabkan transfer daya pada beban R maksimum pada suatu rangkaian resistor sederhana, dapat ditentukan dari Hukum Kirchhoff dan Metode Thevenin.

Dalam aplikasi di bidang Teknik Listrik, persoalan ini merupakan masalah Optimasi, yaitu dalam kasus untuk mencari Impedansi yang cocok (*Impedance Matching*). Pemodelannya akan menghasilkan Sistem Persamaan Linier.

Dengan bantuan Program Komputer perhitungan untuk mencari solusi dari Sistem Persamaan Linier tersebut dapat dilakukan dengan mudah dan cepat.

Kata kunci : Pencocokan impedansi, Hukum Kirchhoff, Metode Thevenin.

ABSTRACT

The mathematical model of the adjustable resistance value R that maximizes the power transfer across R on a simple resistor circuit can be derived from Kirchhoff's Laws and Thevenin's Method.

In the Electrical Engineering Applications, this case is one of Optimization problem, with Impedance Matching act as an example. The model was producing linier Equations System

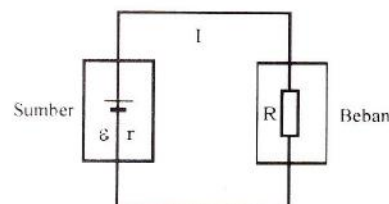
With the aids of Computer Programming the calculation to find the solution of systems of linear equations, can be determined easily and rapidly.

Keywords : Impedance Matching, Kirchhoff's Laws, Thevenin's Method.

PENDAHULUAN.

Pada rangkaian dengan sumber tegangan yang memiliki gaya gerak listrik (ggl) ε volt dan tahanan dalam $r \Omega$ serta sebuah beban $R \Omega$, pemindahan daya pada beban R akan maksimum bila impedansinya sama dengan tahanan dalam sumber, yaitu $R = r$. Menurut Arthur Beiser^(1,2), hal ini disebut sebagai pencocokan impedansi (*Impedance Matching*).

Perhatikan gambar 1 berikut ini :



Gambar 1 : Rangkaian I

Arus I yang melalui rangkaian adalah $I = \varepsilon / (R + r)$

Daya yang dipindahkan / ditransfer pada beban R adalah $P(R) = I^2 R = \varepsilon^2 R / (R + r)^2$

Syarat untuk P maksimum adalah $dP / dR = 0$ sehingga diperoleh $R = r$ (1)

Daya maksimum yang dipindahkan adalah $P = \varepsilon^2 R / (R + R)^2 = \varepsilon^2 / 4R$

Misalnya jika ggl $\varepsilon = 12$ volt, tahanan dalam $r = 2$ Ω , untuk rangkaian I seperti gambar 1, akan ditentukan harga R sehingga daya yang ditransfer pada R akan maksimum.

Menurut perhitungan di atas, akan diperoleh $R = r = 2$ Ω dan P maksimum = 18 watt.

Hasil perhitungan di atas dapat juga dilakukan dengan cara mencoba-coba (*Trial and Error*). Untuk rangkaian sederhana cukup dilakukan dengan kalkulator, tetapi untuk rangkaian yang lebih sulit dapat dilakukan dengan Program *Microsoft Excel*.

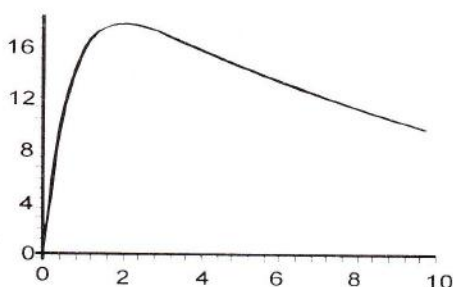
Caranya dengan membuat tabel perhitungan seperti di bawah ini :

Tabel 1 : Perhitungan penentuan transfer daya maksimum rangkaian I.

Beban R [Ω]	Arus $I = \varepsilon / (R + r)$ [A]	Daya $P = I^2 R$ [watt]
0,5	4,8	11,52
1	4	16
1,9	3,0769	17,988
2	3	Maksimum 18
2,1	2,9268	17,989
3	2,4	17,28
4	2	16
6	1,5	13,5
10	1	10
22	0,5	5,5

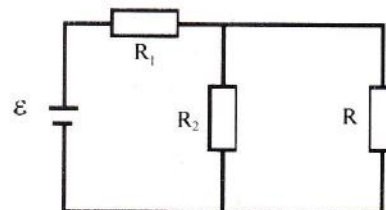
Hasil perhitungan ini sesuai jika dibuat grafiknya, menggunakan Program *Derive* atau *Maple 9.5*, yaitu $P(R) = 144 R / (R + 2)^2$ atau $P(x) = 144 x / (x + 2)^2$

> plot(144*x/(x+2)^2, x=0..10);



Gambar 1a : Penentuan transfer daya maksimum rangkaian I

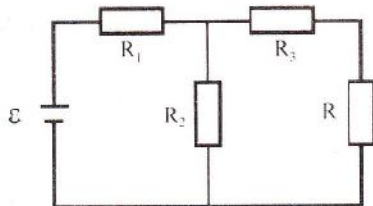
Menurut Halliday ⁽³⁾ persoalan di atas (rangkain gambar 1) dapat dikembangkan menjadi rangkaian seperti pada gambar 2 di bawah ini :



Gambar 2 : Rangkaian II

Hasilnya akan diperoleh beban R yang menyebabkan transfer daya maksimum adalah $R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$

Menurut Chapra ⁽⁴⁾ persoalan ini dapat dikembangkan lagi menjadi rangkaian seperti pada gambar 3 berikut ini :



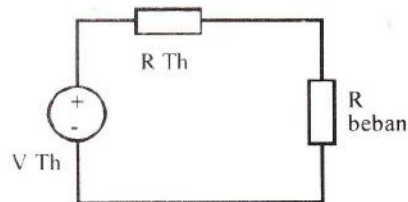
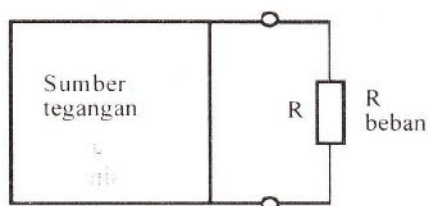
Gambar 3 : Rangkaian III

Hasilnya akan diperoleh beban R yang menyebabkan transfer daya maksimum adalah $R = (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / (R_1 + R_2)$

Selanjutnya akan dibahas untuk rangkaian yang lebih sukar.

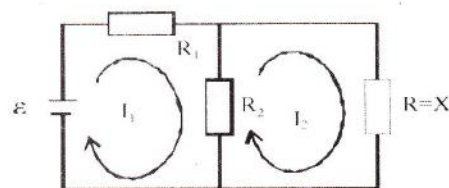
PEMBAHASAN.

1. Untuk menyelesaikan persoalan di atas dipergunakan metode sebagai berikut : Mencari arus I yang melalui beban R yang bervariasi dengan menggunakan Hukum Kirchhoff, yang selanjutnya akan diperoleh sistem persamaan linier. Daya maksimum yang ditransfer $P(R) = I^2 R$ dapat dicari menggunakan turunan atau dengan cara mencoba-coba (*Trial and Error*) menggunakan Program *Microsoft Excel*.
2. Menyederhanakan rangkaian yang lebih rumit pada gambar 2 dan 3 menjadi gambar 1 dengan metode Thevenin. Menurut Giorgio ⁽⁵⁾, metode Thevenin dilakukan dengan mengubah rangkaian pada sumber tegangan, sehingga diperoleh $V_{Thevenin}$ dan $R_{Thevenin}$. $R_{beban} = R_{Thevenin}$ dan daya maksimum yang ditransfer adalah $P = (V_{Th})^2 / 4R_{Th}$



Gambar 4 : Metode Thevenin

Misalnya rangkaian II (gambar 2) akan dianalisis dengan menggunakan gambar 2a, katakanlah dengan data $\epsilon = 18$ volt, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$ sedang beban $R = x$ dibuat bervariasi. Akan ditentukan nilai R sedemikian rupa, sehingga daya yang ditransfer pada R akan maksimum.



Gambar 2a : Analisis dari rangkaian II

Menurut metode 1 : misalkan arus yang mengalir pada loop I dan II masing-masing adalah I_1 dan I_2 , dengan menggunakan Hukum Kirchhoff untuk tegangan akan diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 &= \epsilon \\ -R_2 I_1 + (x + R_2) I_2 &= 0 \end{aligned}$$

diperoleh arus

$$I_2 = (\epsilon R_2) / [(R_1 + R_2)x + R_1 R_2]$$

Daya yang ditransfer

$$P(x) = I_2^2 x = (\epsilon R_2)^2 x / [(R_1 + R_2)x + R_1 R_2]^2$$

Menurut persamaan (1) atau menggunakan turunan $dP(x) / dx = 0$, akan diperoleh beban

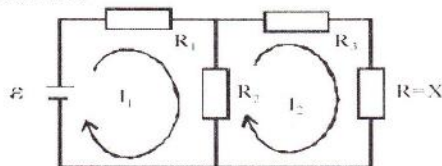
$$R = x = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) \dots \dots \dots (2)$$

Untuk contoh pada gambar 2a diperoleh $R = x = 2 \Omega$ dan daya maksimum $P = 18$ watt.

Menurut metode 2, untuk contoh pada gambar 2a, sesuai dengan persamaan (2) diperoleh $R_{Thevenin} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = 2 \Omega$ (R_1 paralel dengan R_2) dan menurut hukum perbandingan tegangan diperoleh $V_{Thevenin} = [\epsilon R_2 / (R_1 + R_2)]$

$\varepsilon = 12$ volt dan daya maksimum $P = (V_{Th})^2 / 4 R_{Th} = (12 \times 12) / (4 \times 2) = 18$ watt.

Misalnya rangkaian III (gambar 3) akan dianalisis dengan menggunakan gambar 3a, misalnya dengan data ggl $\varepsilon = 18$ volt, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 1 \Omega$, sedang beban $R = x$ dibuat bervariasi. Akan ditentukan nilai R sedemikian rupa, sehingga daya yang ditransfer pada R akan maksimum.



Gambar 3a : Analisis dari rangkaian III

Menurut metode 1 : misalkan arus yang mengalir pada loop I dan II masing-masing adalah I_1 dan I_2 , dengan menggunakan Hukum Kirchhoff untuk tegangan akan diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut :

$$(R_1 + R_2) I_1 - I_2 = \varepsilon - R_2 I_1 + (x + R_2 + R_3) I_2 = 0$$

diperoleh arus

$$I_2 = (\varepsilon R_2) / [(R_1 + R_2)x + R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3]$$

Daya yang ditransfer $P(x) = I_2^2 x = (\varepsilon R_2)^2 x / [(R_1 + R_2)x + R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3]^2$

Menurut persamaan (1) atau menggunakan turunan $dP(x) / dx = 0$, akan diperoleh beban

$$R = x = (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / (R_1 + R_2) \quad \dots (3)$$

Untuk contoh pada gambar 3a diperoleh $R = x = 3 \Omega$ dan daya maksimum $P = 12$ watt. Dengan cara mencoba-coba, dipergunakan Program *Microsoft Excel* dan hasilnya adalah sebagai berikut :

Maximum Power Transfer	
E	18
R1	3
R2	6
R3	1
R = x	3
P(x)	12

Caranya adalah $R = x$ pada persamaan $P(x)$ diubah-ubah, sehingga diperoleh harga $P(x)$ yang maksimum.

Di Laboratorium Fisika Terapan, contoh rangkaian pada gambar 3a sudah dicoba dengan menggunakan data $\varepsilon = 18$ volt, $R_1 = 30 \Omega$, $R_2 = 60 \Omega$ dan $R_3 = 10 \Omega$. Untuk beban $R = x$ dipergunakan tahanan geser yang sebelumnya diukur dulu masing-masing resistansinya menggunakan AVO meter digital, kemudian tegangan yang melalui beban diukur menggunakan Voltmeter analog dengan batas ukur 0 – 10 volt.

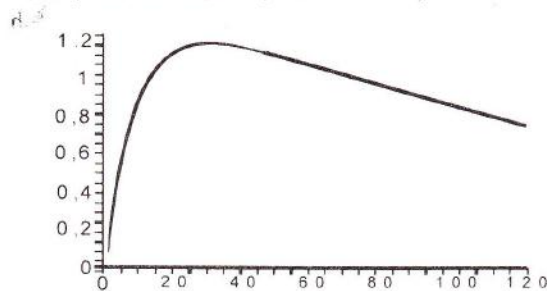
Hasil percobaan dapat dilihat pada tabel di bawah ini :

Tabel 2 : Penentuan transfer daya maksimum rangkaian III.

Resistansi R [Ω]	Tegangan V [volt]	Daya $P = V^2 / R$ [W]	P (Excel/teori) [W]
10	2,8	0,7840	0,9000
20	4,5	1,0125	1,1520
25	5,2	1,0816	1,1900
29	5,7	1,1203	1,1996
30	5,8	1,1213	Maksimum 1,2000
31	5,9	Maksimum 1,1229	1,1997
35	6,2	1,0983	1,1929
40	6,5	1,0562	1,1755
50	7,3	1,0658	1,1250
60	7,8	1,0140	1,0666
80	8,6	0,9245	0,9521
100	9,1	0,8281	0,8521
110	9,3	0,7863	0,8082

Untuk contoh ini diperoleh $I_2 = 12 / (x + 30)$ dan $P(x) = I_2^2 x = 144 x / (x + 30)^2$

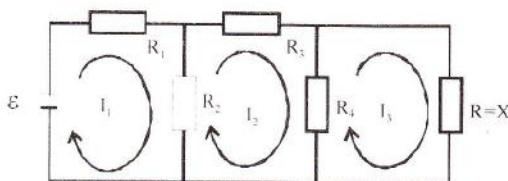
$\text{plot}(144*x/(x+30)^2, x = 0..120);$



Gambar 3b : Penentuan transfer daya maksimum rangkaian III

Menurut metode 2, untuk contoh pada gambar 3a, sesuai dengan persamaan (3) diperoleh $R_{\text{Thevenin}} = (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / (R_1 + R_2) = 3 \Omega$. (R_1 paralel dengan R_2 diperoleh $R_{\text{paralel}} = 2 \Omega$, kemudian R_{paralel} ini diseriikan dengan $R_3 = 1 \Omega$ sehingga diperoleh $R_{\text{Thevenin}} = 3 \Omega$) dan menurut hukum perbandingan tegangan diperoleh $V_{\text{Thevenin}} = [R_2 / (R_1 + R_2)] \varepsilon = 12$ volt dan daya maksimum $P = (V_{\text{Th}})^2 / 4 R_{\text{Th}} = (12 \times 12) / (4 \times 3) = 12$ watt.

Selanjutnya untuk contoh lain akan dipergunakan rangkaian yang lebih sukar. Misalnya rangkaian IV (gambar 5) akan dianalisis dengan menggunakan data ggl $\varepsilon = 18$ volt, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$, sedang beban $R = x$ dibuat bervariasi. Akan ditentukan nilai R sedemikian rupa, sehingga daya yang ditransfer pada R akan maksimum.



Gambar 5 : Rangkaian IV

Menurut metode 1 : misalkan arus yang mengalir pada loop I, II dan III masing-masing adalah I_1 , I_2 dan I_3 , dengan menggunakan Hukum Kirchhoff untuk tegangan akan diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 &= \varepsilon \\ -R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) I_2 - R_4 I_3 &= 0 \\ R_4 I_2 + (x + R_4) I_3 &= 0 \end{aligned}$$

diperoleh arus

$$I_3 = (\varepsilon R_2 R_4) / \{ [R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)]x + R_4(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) \}$$

$$\text{Daya yang ditransfer } P(x) = I_3^2 x = (\varepsilon R_2 R_4)^2 x / \{ [R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)]x + R_4(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) \}^2$$

Menurut persamaan (1) atau menggunakan turunan $dP(x) / dx = 0$, akan diperoleh beban $R = x = R_4(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / [R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)] \dots \dots \dots (4)$ Untuk contoh pada gambar 5 diperoleh $R = x = 2 \Omega$ dan daya maksimum $P = 4,5$ watt.

Dengan Program *Microsoft Excel* diperoleh hasil sebagai berikut :

R1	3
R2	6
R3	2
R4	4
E	18
X	2
P(x)	4.5

Menurut metode 2, untuk contoh pada gambar 4 diperoleh $R_{\text{Thevenin}} = 2 \Omega$. (R_1 paralel dengan R_2 diperoleh $R_{\text{paralel}} = 2 \Omega$, kemudian R_{paralel} ini diseriikan dengan R_3 diperoleh $R_{\text{seri}} = 4 \Omega$. Akhirnya R_{seri} ini diparalelkan dengan R_4 , sehingga diperoleh $R_{\text{Thevenin}} = 2 \Omega$). Perhitungan R_{Thevenin} ini sesuai dengan persamaan (4).

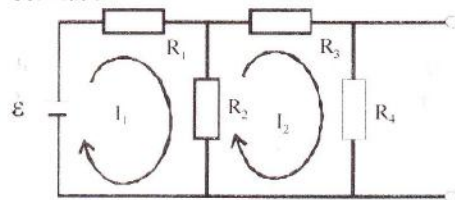
Untuk mencari V_{Thevenin} adalah sebagai berikut :

R_3 seri dengan R_4 , diperoleh $R_{\text{seri}} = 6 \Omega$. R_{seri} ini diparalelkan dengan R_2 diperoleh $R_{\text{paralel}} = 3 \Omega$. Akhirnya R_{paralel} ini diseriikan dengan R_1 , sehingga diperoleh $R_{\text{total}} = 6 \Omega$ dan arus yang mengalir pada loop I adalah $I_1 = 3$ A. Karena $R_{\text{seri}} = R_2 = 6 \Omega$, maka

diperoleh arus yang mengalir pada loop II adalah $I_2 = 1,5 \text{ A}$.

$$V_{\text{Thevenin}} = I_2 R_4 = 1,5 \times 4 = 6 \text{ volt.}$$

Jalan lain adalah dengan memisalkan arus yang mengalir pada loop I dan II pada gambar 5a masing-masing adalah I_1 dan I_2 , dengan menggunakan Hukum Kirchhoff untuk tegangan akan diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut :



Gambar 5a : Analisis dari rangkaian IV

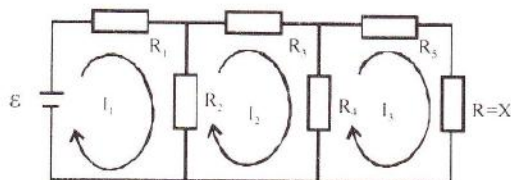
$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 &= \varepsilon, \\ \text{diperoleh } 9 I_1 - 6 I_2 &= 18 \\ R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) I_2 &= 0, \\ \text{diperoleh } -6 I_1 + 12 I_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dari ke dua persamaan ini diperoleh $I_1 = 3 \text{ A}$ dan $I_2 = 1,5 \text{ A}$.

$$V_{\text{Thevenin}} = I_2 R_4 = 1,5 \times 4 = 6 \text{ volt.}$$

$$\text{Daya maksimum } P = (V_{\text{Th}})^2 / 4 R_{\text{Th}} = (6 \times 6) / (4 \times 2) = 4,5 \text{ watt.}$$

Misalnya rangkaian V (gambar 6) akan dianalisis dengan menggunakan ggl $\varepsilon = 18 \text{ volt}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 6 \Omega$, $R_3 = 2 \Omega$, $R_4 = 4 \Omega$ dan $R_5 = 2 \Omega$, sedang beban $R = x$ dibuat bervariasi. Akan ditentukan nilai R sedemikian rupa, sehingga daya yang ditransfer pada R akan maksimum.



Gambar 6 : Rangkaian V

Menurut metode 1 : misalkan arus yang mengalir pada loop I, II dan III masing-masing adalah I_1 , I_2 dan I_3 , dengan menggunakan Hukum Kirchhoff

untuk tegangan akan diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 &= \varepsilon \\ \varepsilon - R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) I_2 - R_4 I_3 &= 0 \\ -R_4 I_2 + (x + R_4 + R_5) I_3 &= 0 \end{aligned}$$

diperoleh arus

$$I_3 = (\varepsilon R_2 R_4) / \{ [R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)]x + R_4 R_1(R_2 + R_3 + R_5) + R_4 R_2(R_3 + R_5) + R_5 R_1(R_2 + R_3) + R_5 R_2 R_3 \}$$

$$\text{Daya yang ditransfer } P(x) = I_3^2 x =$$

$$(\varepsilon R_2 R_4)^2 x / \{ [R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)]x + R_4 R_1(R_2 + R_3 + R_5) + R_4 R_2(R_3 + R_5) + R_5 R_1(R_2 + R_3) + R_5 R_2 R_3 \}^2$$

Menurut persamaan (1) atau menggunakan turunan $dP(x) / dx = 0$, akan diperoleh beban

$$R = x = [R_4(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_5 + R_2 R_3 + R_2 R_5) + R_5(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + R_4 R_1(R_2 + R_3 + R_4)] / [R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_2(R_3 + R_4)] \dots (5)$$

Untuk contoh pada gambar 6 diperoleh $R = x = 4 \Omega$ dan daya maksimum $P = 2,25 \text{ watt}$.

Dengan Program *Microsoft Excel* diperoleh hasil sebagai berikut :

R1	3
R2	6
R3	2
R4	4
R5	2
E	18
x	4
P(x)	2.25

CATATAN : Untuk menghindari kesulitan sebaiknya R_1 sampai dengan R_5 langsung diganti dengan angka, sehingga diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned} 9 I_1 - 6 I_2 &= 18 \\ -6 I_1 + 12 I_2 - 4 I_3 &= 0 \\ -4 I_2 + (x + 6) I_3 &= 0 \end{aligned}$$

diperoleh arus $I_3 = 6 / (x + 4)$ dan daya $P(x) = I_3^2 x = 36 x / (x + 4)^2$, sehingga diperoleh $R = x = 4 \Omega$ dan daya maksimum = 2,25 watt. Menurut metode 2, untuk contoh pada gambar 6 diperoleh $R_{\text{Thevenin}} = 4 \Omega$.

(R_1 paralel dengan R_2 diperoleh R paralel 1 = 2Ω , kemudian R paralel 1 ini diserikan dengan R_3 diperoleh R seri = 4Ω . R seri ini diparalelkan dengan R_4 , sehingga diperoleh R paralel 2 = 2Ω . Akhirnya R paralel 2 ini diserikan dengan R_5 , sehingga diperoleh

$R_{\text{Thevenin}} = 4 \Omega$) Perhitungan R_{Thevenin} ini sesuai dengan persamaan (5).

Dengan cara yang sama seperti contoh pada gambar 5 diperoleh $V_{\text{Thevenin}} = 6$ volt.

Daya maksimum $P = (V_{\text{Th}})^2 / 4 R_{\text{Th}} = (6 \times 6) / (4 \times 4) = 2,25$ watt.

KESIMPULAN DAN SARAN.

KESIMPULAN :

Transfer daya maksimum pada suatu rangkaian resistor sederhana dapat dicari dengan menggunakan model matematika yang berbentuk $P (R) = \epsilon^2 R / (R + r)^2$, dimana beban $R = x$ adalah resistor yang resistansinya bervariasi (yang sering disebut sebagai potensiometer).

Untuk menentukan nilai resistansi yang mengakibatkan transfer daya maksimum dapat dipergunakan dua metode, yaitu :

Untuk menentukan nilai resistansi yang mengakibatkan transfer daya maksimum dapat dipergunakan dua metode, yaitu :

1. Mencari arus yang mengalir pada beban R dengan menggunakan Hukum Kirchhoff dan

daya $P = I^2 R$ akan maksimum bila $R = x = r$ dan P maksimum = $\epsilon^2 / 4 r$.

2. Mengubah sumber tegangan dengan menggunakan Metode Thevenin, sehingga diperoleh R_{Thevenin} dan V_{Thevenin} dan P maksimum = $(V_{\text{Th}})^2 / 4 R_{\text{Th}}$.

SARAN :

Masalah ini dapat dikembangkan untuk rangkaian dengan loop yang lebih rumit dan untuk menentukan nilai R lebih mudah dilakukan dengan Metode Thevenin.

DAFTAR PUSTAKA

1. Arthur Beiser. 1992. *Modern Technical Physics*, 6 th Edition. Massachusetts : Addison Wesley Publishing Company, halaman 548 – 549.
2. Schaum, Arthur Beiser. 2004. *Applied Physics*, 4 th Edition. New York : Mc Graw Hill halaman 297.
3. Halliday David, Resnick Robert dan Walker Jearl. 2001. *Fundamentals of Physics*, 6 th Edition. Singapore : John Wiley, halaman 655.
4. Steven C Chapra and Raymond P Canale, 1998. *Numerical Methods for Engineers with Programming and Software Applications*, 3 rd Edition. New York : WCB / Mc Graw Hill, hal 408 – 412.
5. Giorgio Rizzoni. 1996. *Principles and Applications of Electrical Engineering*, 2 nd Edition. Penerbit Irwin, halaman 97.